

i e 

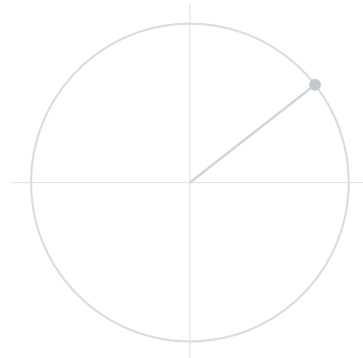
NÚMEROS COMPLEXOS

FUNDAMENTOS, MÉTODOS
E APLICAÇÕES

 1

WALLACE SANTO

 π



Números Complexos

Fundamentos, Métodos e Aplicações

Wallace Santo

Apresentação

Os números complexos ocupam um lugar singular na formação matemática. À primeira vista, surgem como uma ampliação natural do conjunto dos números reais; mas, à medida que o estudo avança, revelam-se muito mais do que isso: uma linguagem que reorganiza a álgebra, esclarece a trigonometria, simplifica identidades e requalifica problemas de geometria e desigualdades que, por outros caminhos, resistiriam muito mais.

Este livro foi escrito com esse espírito. Seu propósito não é apresentar os números complexos como tópico fechado, mas como método, uma estrutura que, em muitos contextos, não apenas resolve um problema particular, mas reorganiza a forma de pensar o problema.

Este livro também nasce de uma inquietação pessoal. Durante minha formação, e em especial no período em que estudei para concursos militares, muitas vezes me incomodou o fato de que certas resoluções pareciam depender de identidades inesperadas ou passagens pouco transparentes para quem estava aprendendo. A pergunta que sempre me acompanhou era simples: como desenvolver a intuição necessária para enxergar esses caminhos, e até que ponto seria possível substituí-los por métodos mais claros, mais sistemáticos e mais inteligíveis? Foi nesse contexto que os números complexos se tornaram, para mim, mais do que um tema: tornaram-se uma forma de organizar ideias e de tornar visíveis estruturas que, por outras abordagens, pareciam artificiais ou dispersas.

Parte dessa trajetória apareceu primeiro em *Desvendando a Trigonometria com Números Complexos*, obra em que explorei, de forma mais concentrada, aplicações de complexos à trigonometria. O presente volume amplia esse projeto: parte dos fundamentos, percorre a teoria de modo progressivo e chega a tópicos mais avançados, preservando sempre a mesma preocupação central com clareza, método e poder de aplicação.

O arco principal percorre seis capítulos de teoria. O primeiro estabelece os fundamentos algébricos: operações, módulo, conjugado, argumento e raízes. O segundo desenvolve a forma trigonométrica e o Teorema de Moivre, com aplicações imediatas a raízes da unidade e identidades trigonométricas. O terceiro reúne aplicações avançadas e problemas

resolvidos, cobrindo equações, lugares geométricos, produtos trigonométricos e identidades de alta densidade algébrica. Os capítulos quatro e cinco tratam de dois temas que raramente aparecem juntos em textos do mesmo nível: polinômios de Chebyshev e desigualdades trigonométricas, ambos com presença relevante em olimpíadas e provas de alto nível. O sexto fecha o arco teórico com geometria no plano complexo: rotações, homotetias, alinhamento, colinearidade e a geometria do triângulo em linguagem complexa.

A segunda metade do livro é dedicada a problemas. Um capítulo de problemas selecionados de olimpíada e aprofundamento, com resoluções completas no capítulo seguinte, percorre módulo, conjugado, lugares geométricos, identidades e construções geométricas. Um capítulo de concursos reúne mais de cem questões de, principalmente, ITA, IME e seleções equivalentes, todas integralmente resolvidas. O apêndice concentra fórmulas e identidades essenciais em formato de consulta rápida.

Três aspectos distinguem este volume de outros textos sobre o tema. Primeiro, a integração entre teoria e problemas: os exemplos resolvidos não ilustram a teoria, são extensão dela. Segundo, a amplitude da cobertura: polinômios de Chebyshev, desigualdades via Jensen e Schur, e geometria complexa costumam aparecer em fontes dispersas; aqui estão articulados em sequência. Terceiro, o volume e a qualidade das resoluções: a seção de concursos não apenas lista as questões, oferece resoluções que evidenciam por que a abordagem com complexos é, tantas vezes, a mais natural.

Do ponto de vista de uso, a leitura linear dos seis capítulos de teoria é o caminho para quem está construindo o tema desde o início. Os capítulos sobre Chebyshev e desigualdades podem ser abordados de forma independente após os dois primeiros, caso o objetivo seja aprofundar esses temas sem percorrer o terceiro capítulo na íntegra. O capítulo de geometria complexa pressupõe familiaridade com a forma trigonométrica, mas pode ser consultado pontualmente durante o estudo. Os capítulos de problemas funcionam melhor após o estudo da teoria correspondente; tentar a seção de concursos antes desse estudo tende a revelar mais lacunas do que técnicas. O apêndice deve ser consultado ativamente durante a leitura e não ser reservado para o final.

O livro foi pensado para estudantes que buscam domínio real do tema, em especial os que se preparam para ITA, IME, olimpíadas e outros contextos em que complexos aparecem como método de resolução. Ao mesmo tempo, foi organizado para servir ao leitor autodidata que deseja estudar com autonomia, sem depender de material complementar para preencher lacunas essenciais.

Wallace Santo

Rio de Janeiro, março de 2026

Sumário

Apresentação	i
1 Números Complexos e sua Forma Algébrica	1
1.1 Definição e Operações	2
1.1.1 Definição de Número Complexo	2
1.1.2 Igualdade entre Números Complexos	3
1.1.3 Operações com Números Complexos	3
1.2 Propriedades Algébricas	5
1.2.1 Potências da Unidade Imaginária	7
1.2.2 O Plano de Argand-Gauss	8
1.2.3 Exercícios de Fixação	9
1.2.4 Resoluções dos Exercícios	11
1.3 Conjugado e Módulo	18
1.3.1 Conjugado de um Número Complexo	19
1.3.2 Propriedades do Conjugado	19
1.3.3 Módulo de um Número Complexo	21
1.3.4 Propriedades do Módulo	22
1.4 Divisão de Números Complexos	31
1.4.1 Técnica de Racionalização	31
1.4.2 Inverso Multiplicativo	31
1.5 Equações no Corpo dos Complexos	33
1.5.1 Equações Lineares com Conjugado	33
1.5.2 Raiz Quadrada de um Número Complexo	34
1.5.3 A Equação Quadrática Geral em $\mathbb{C}$	36
1.5.4 O Caso Específico: Equações Reais com discriminante negativo	37
1.5.5 Sistemas com Variáveis Complexas	38
1.6 Representação Geométrica e Lugar Geométrico	39
1.6.1 Circunferências e Discos	39
1.6.2 Retas, Segmentos e Semirretas	40
1.6.3 Mediatrizes, Semiplanos e o Círculo de Apolônio	41
1.6.4 Regiões no Plano Complexo	43
1.6.5 Elipses, Hipérboles e Parábolas	44

1.6.6	CrITÉRIOS AlgÉBRICOS de PosiÇÃO	47
1.6.7	Transformações Elementares	48
1.7	Desigualdade Triangular: Técnicas e Aplicações	51
1.7.1	Desigualdade Triangular	52
1.7.2	Estimativas de Módulo	54
1.8	Exercícios Resolvidos	61
1.9	Exercícios Propostos	82
1.9.1	Módulo, Conjugado e Propriedades Algébricas	82
1.9.2	Representação Geométrica e Lugar Geométrico	83
1.9.3	Equações no Corpo dos Complexos	84
1.9.4	Raízes da Unidade e Produtórios	85
1.9.5	Desigualdade Triangular e Estimativas de Módulo	86
1.9.6	Formas Paramétricas e Representações Especiais	87
1.9.7	Exercícios Militares de Fixação	87
1.10	Soluções dos Exercícios Propostos	90
1.10.1	Módulo, Conjugado e Propriedades Algébricas	90
1.10.2	Representação Geométrica e Lugar Geométrico	94
1.10.3	Equações no Corpo dos Complexos	105
1.10.4	Raízes da Unidade e Produtórios	114
1.10.5	Desigualdade Triangular e Estimativas de Módulo	119
1.10.6	Formas Paramétricas e Representações Especiais	123
2	Forma Trigonométrica e Teorema de Moivre	128
2.1	Representação Geométrica e Forma Trigonométrica	129
2.1.1	Interpretação Geométrica	129
2.1.2	Forma Trigonométrica	129
2.1.3	Argumento de um Número Complexo	130
2.2	Forma Exponencial, Multiplicação e Argumento	134
2.2.1	A Fórmula de Euler	134
2.2.2	Multiplicação, divisão e leitura geométrica	135
2.2.3	Leis algébricas do argumento	137
2.3	Teorema de Moivre	138
2.3.1	Potências	139
2.3.2	Raízes n -ésimas	140
2.3.3	Binômio de Newton com Números Complexos	141
2.4	Complexos e Trigonometria	143
2.4.1	Fórmulas Fundamentais	143
2.4.2	Linearização de Potências Trigonométricas	144
2.4.3	Identidades do Arco-Metade e PGs Trigonométricas	146

2.4.4	Fórmulas de Arco Duplo	148
2.4.5	Fórmulas de Adição	148
2.4.6	Redução ao Quadrante	150
2.4.7	Arcos Notáveis com Números Complexos	150
2.4.8	Identidades Trigonométricas Avançadas	152
2.4.9	Parametrização Trigonométrica (Ângulo Auxiliar)	154
2.4.10	Sistemas Trigonométricos com Números Complexos	155
2.5	Raízes da Unidade	157
2.5.1	Definição e Construção	157
2.5.2	Fatorações básicas	159
2.5.3	O filtro em primeira leitura	160
2.5.4	Raízes Primitivas	161
2.5.5	Polinômios Ciclotômicos	164
2.5.6	Aplicações do filtro de raízes da unidade	171
2.5.7	Produtos trigonométricos e equações geradoras	175
2.5.8	Geometria dos Polígonos Regulares com Raízes da Unidade	179
2.6	Exercícios Resolvidos	187
2.7	Exercícios Propostos	196
2.8	Soluções dos Exercícios Propostos	207
3	Aplicações Avançadas	258
3.1	Produtos, Fatorações e Telescopagem	258
3.2	Parametrização Trigonométrica, Argumento e Arctangente	261
3.3	Filtro de Raízes da Unidade e Contagens Modulares	265
3.4	Parte Real e Módulo	271
3.5	Arcos Notáveis, Produtos e Somatórios	274
3.6	Somas, Quocientes e Identidades	283
3.7	Equações via Polinômios em $\exp(ix)$	287
3.8	Sistemas com Parâmetros e Semiângulos	290
3.9	Problemas Seleccionados de Concursos Militares	295
3.9.1	Arctangentes, Argumentos e Arcos Inversos	295
3.9.2	Equações, Fatorações e Arcos Metade	298
3.9.3	Produtos, Identidades e Arcos Especiais	303
3.9.4	Polinômios Simétricos e Arco Metade	307
3.10	Raízes da Unidade e Aplicações Avançadas	308
3.10.1	Somatórios e Propriedades	308
3.10.2	Extensões	314
3.11	Exercícios Propostos	322

4	Polinômios de Chebyshev	325
4.1	Definição pelo Teorema de Moivre	325
4.2	A Relação de Recorrência	328
4.3	Raízes, Extremos e Propriedades	330
4.4	Aplicações em Somas Finitas	334
4.5	Aplicações em Identidades Trigonométricas	336
4.6	Exercícios Propostos	342
5	Desigualdades Trigonométricas	344
5.1	Estimativas básicas em $\mathbb{C}$	344
5.2	Otimização por Completamento de Fase	346
5.3	Somas de Exponenciais e Progressões Geométricas	347
5.4	Triângulos e Números Complexos	349
5.5	Jensen e Schur	351
5.6	Aplicações em Exercícios de Concursos	353
5.7	Exercícios Propostos	355
6	Geometria Complexa: Métodos, Configurações e Aplicações	359
6.1	O plano complexo como plano geométrico	361
6.1.1	Traduzindo linguagem geométrica em linguagem complexa	362
6.2	Vetores, paralelismo e distância	365
6.3	Produto escalar real e ângulos	368
6.4	Retas, projeções e circunferências	371
6.5	Inversão	381
6.6	O triângulo no círculo unitário	384
6.7	Conciclicidade e transformações	399
6.8	Exemplos resolvidos	409
6.9	Exercícios	428
7	Problemas Selecionados de Olimpíada e Aprofundamento	458
7.1	Módulo, conjugado e lugares geométricos	458
7.2	Equações algébricas e polinômios	461
7.3	Identidades algébricas com leitura geométrica	464
7.4	Geometria no plano complexo	466
7.5	Trigonometria com números complexos	469
7.6	Raízes da unidade e estruturas ciclotômicas	470
7.7	Polígonos regulares e configurações finitas	472
7.8	Combinatória com números complexos	473

7.9	Diversos	474
7.10	Questões para tentar sozinho	476
8	Resoluções dos Problemas Seleccionados	479
8.1	Módulo, conjugado e lugares geométricos	479
8.2	Equações algébricas e polinômios	499
8.3	Identidades algébricas com leitura geométrica	518
8.4	Geometria no plano complexo	534
8.5	Trigonometria com números complexos	561
8.6	Raízes da unidade e estruturas ciclotômicas	566
8.7	Polígonos regulares e configurações finitas	585
8.8	Combinatória com números complexos	601
8.9	Diversos	604
9	Exercícios de Concursos Seleccionados	625
9.1	Exercícios de múltipla escolha	625
9.2	Exercícios discursivos	642
9.3	Gabarito	649
10	Resoluções de Concursos Seleccionados	653
10.1	Resoluções dos exercícios objetivos	653
10.2	Resoluções dos exercícios discursivos	709
Apêndice A	Templates de Resolução: Complexos para Álgebra	739
A.1	Template 1 — Equação trigonométrica	740
A.2	Template 2 — Tangente e semiângulo	741
A.3	Template 3 — Somas de exponenciais complexas	742
A.4	Template 4 — Raízes da unidade	743
A.5	Template 5 — Cotangente e cossecante	744
A.6	Template 6 — Geometria no plano complexo	745
A.7	Template 7 — Soma de Gauss	747
A.8	Template 8 — Completamento de fase (max/min)	748
A.9	Template 9 — Linearização de potências	749
A.10	Template 10 — Arctangente pelo argumento do produto	751
A.11	Template 11 — Chebyshev: equação polinomial em cosseno	752
A.12	Template 12 — Identidades em triângulos	753

1

Números Complexos e sua Forma Algébrica

No desenvolvimento histórico da matemática, a necessidade de resolver equações como $x^2 + 1 = 0$ levou à criação de um novo conjunto numérico: os **números complexos**. Longe de serem apenas uma abstração teórica, eles constituem uma das ferramentas mais versáteis da matemática, simplificando problemas em trigonometria, geometria, física e engenharia.

Você Sabia? — Cardano e a utilidade dos complexos

O matemático italiano **Gerolamo Cardano** (1501–1576) foi um dos primeiros a lidar com números complexos, embora os considerasse *inúteis*. Hoje, eles são indispensáveis em áreas como análise de circuitos elétricos, mecânica quântica e processamento de sinais.



1.1 Definição e Operações

As regras operacionais seguem da convenção $i^2 = -1$.

1.1.1 Definição de Número Complexo

Definição 1.1. — Números complexos

Um **número complexo** é um par ordenado $z = (a, b)$, onde a e b são números reais. Podemos representá-lo na forma algébrica como:

$$z = a + bi$$

onde i é a **unidade imaginária**, definida por $i^2 = -1$. Chamamos:

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad (\text{parte real de } z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z) \quad (\text{parte imaginária de } z)$$

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $z = bi$ é um **número imaginário puro**.

O conjunto de todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Exemplo — Partes real e imaginária

Considere os seguintes números complexos:

$$(a) \ z_1 = 3 + 2i \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = 3 \text{ e } \operatorname{Im}(z_1) = 2$$

$$(b) \ z_2 = -1 + 5i \Rightarrow \operatorname{Re}(z_2) = -1 \text{ e } \operatorname{Im}(z_2) = 5$$

$$(c) \ z_3 = 4 \Rightarrow \operatorname{Re}(z_3) = 4 \text{ e } \operatorname{Im}(z_3) = 0 \quad (\text{número real})$$

$$(d) \ z_4 = 3i \Rightarrow \operatorname{Re}(z_4) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z_4) = 3 \quad (\text{imaginário puro})$$

Todo número real $a \in \mathbb{R}$ pode ser visto como um número complexo da forma $a + 0i$; portanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.1.2 Igualdade entre Números Complexos

Definição 1.2. — Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são **iguais** se, e somente se:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ e } b = d$$

Exemplo — Determinação de x e y por igualdade

Determine os valores reais de x e y tais que:

$$(2x + 3) + (y - 1)i = 5 + 4i$$

Resolução. Pela igualdade de complexos, devemos ter:

$$\begin{cases} 2x + 3 = 5 & (\text{partes reais}) \\ y - 1 = 4 & (\text{partes imaginárias}) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$y - 1 = 4 \Rightarrow y = 5$$

1.1.3 Operações com Números Complexos

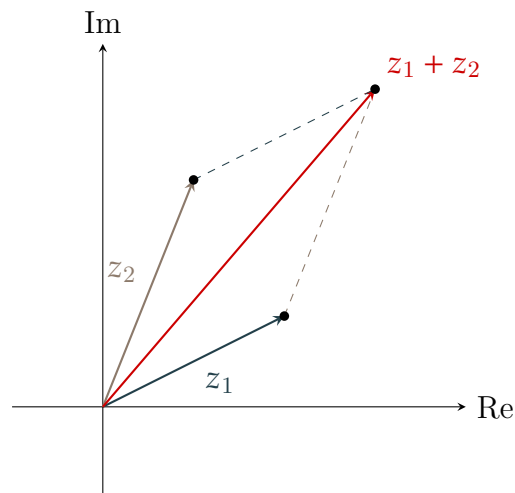
Adição de Números Complexos

Definição 1.3. — Adição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ números complexos. A **soma** é definida por:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

A adição de números complexos possui uma interpretação geométrica natural. No plano de Argand-Gauss, somar z_1 e z_2 equivale a somar dois vetores pela **regra do paralelogramo**, tornando a desigualdade triangular geometricamente imediata.



Exemplo — Soma de dois complexos

Calcule $(3 + 2i) + (1 - 5i)$:

$$\begin{aligned}(3 + 2i) + (1 - 5i) &= (3 + 1) + (2 - 5)i \\ &= 4 - 3i\end{aligned}$$

Multiplicação de Números Complexos

Definição 1.4. — Multiplicação

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ números complexos. O **produto** é definido por:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Algebricamente, multiplicamos como binômios e usamos $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Exemplo — Produto de dois complexos

Calcule $(2 + 3i)(1 - 4i)$:

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i)(1 - 4i) &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-4i) + 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-4i) \\
 &= 2 - 8i + 3i - 12i^2 \\
 &= 2 - 5i - 12(-1) \\
 &= 2 - 5i + 12 \\
 &= 14 - 5i
 \end{aligned}$$

_____ ◇ _____

1.2 Propriedades Algébricas

Os números complexos herdam todas as propriedades operacionais dos reais, e uma a mais: todo complexo não nulo possui inverso multiplicativo. Isso faz de $\mathbb{C}$ um *corpo*, o ambiente algébrico mais confortável para manipulações.

Adição. As leis básicas da soma em $\mathbb{C}$ são as mesmas já conhecidas em $\mathbb{R}$ e organizam a estrutura aditiva do corpo.

Propriedade 1.1. Adição em $\mathbb{C}$

Sejam $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ números complexos quaisquer. A adição satisfaz:

1. **Comutatividade:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. **Associatividade:** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
3. **Elemento Neutro:** Existe um único $0 = 0 + 0i$ tal que:

$$z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

4. **Elemento Simétrico:** Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe um único $-z$ tal que:

$$z + (-z) = 0$$

onde $-z = -a - bi$ se $z = a + bi$

A **subtração** fica definida por $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, e herda todas as propriedades da adição e do oposto.

Demonstração da comutatividade. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \quad (\text{comutatividade em } \mathbb{R}) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

As demais propriedades seguem de maneira análoga, diretamente das propriedades correspondentes em $\mathbb{R}$. ■

Essas propriedades mostram que $(\mathbb{C}, +)$ é um **grupo abeliano** (comutativo).

Multiplicação. A estrutura multiplicativa preserva as leis usuais e acrescenta o fato decisivo de que todo complexo não nulo admite inverso.

Propriedade 1.2. *Multiplicação em $\mathbb{C}$*

Sejam $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ números complexos quaisquer. A multiplicação satisfaz:

1. Comutatividade: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

2. Associatividade: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

3. Elemento Neutro: Existe um único $1 = 1 + 0i$ tal que:

$$z \cdot 1 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

4. Elemento Inverso: Para todo $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe um único $z^{-1} = \frac{1}{z}$ tal que:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

5. Distributividade:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Combinadas às propriedades da adição, essas leis caracterizam $\mathbb{C}$ como um **corpo**.

1.2.1 Potências da Unidade Imaginária

Definição 1.5. — Potências de i

As primeiras potências de i são:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

A partir de $i^4 = 1$, o padrão se repete ciclicamente.

Para calcular i^n com $n \in \mathbb{Z}$ positivo, basta escrever $n = 4q + r$, com $0 \leq r \leq 3$. Então

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q i^r = i^r,$$

isto é, a potência depende apenas do resto da divisão de n por 4.

Exemplo — Potência i^{127}

Calcule i^{127} :

$$127 = 4 \cdot 31 + 3$$

$$i^{127} = i^3 = -i$$

Logo $i^{127} = -i$.

Exemplo — Menor n para que $(1 - i)^n$ seja imaginário puro positivo

Determine o menor inteiro positivo n tal que $(1 - i)^n$ seja um número puramente imaginário com parte imaginária positiva.

Resolução. Calculamos o quadrado de $1 - i$:

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

Para $n = 2$, obtemos $-2i$, que é um número puramente imaginário, mas sua parte imaginária (-2) é **negativa**. O problema exige que ela seja positiva. Como $(1 - i)^2$ é puramente imaginário, podemos testar os próximos expoentes pares (as potências ímpares terão ambas as partes reais e imaginárias não nulas) multiplicando o resultado

por $(1 - i)^2$ sucessivamente:

$$(1 - i)^4 = (1 - i)^2 \cdot (1 - i)^2 = (-2i)(-2i) = 4i^2 = -4 \quad (\text{Real})$$

$$(1 - i)^6 = (1 - i)^4 \cdot (1 - i)^2 = (-4)(-2i) = 8i$$

Avaliando o resultado para $n = 6$, obtemos $8i$, que é um número puramente imaginário com parte imaginária positiva ($8 > 0$). Essa é a primeira ocorrência que satisfaz a condição exigida. $n = 6$.

Para expoentes negativos, o mesmo ciclo continua:

$$i^{-1} = -i, \quad i^{-2} = -1, \quad i^{-3} = i, \quad i^{-4} = 1.$$

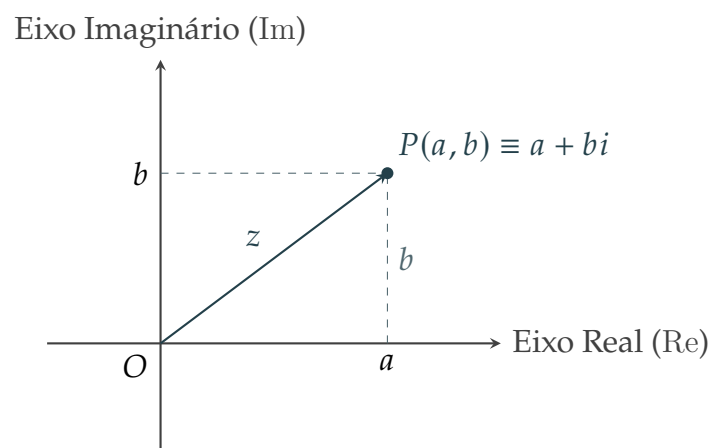
Essa periodicidade de período 4 reaparece com frequência em somas e séries geométricas.

1.2.2 O Plano de Argand-Gauss

Assim como representamos números reais em uma reta (a reta real), podemos representar números complexos em um **plano bidimensional**, conhecido como **Plano de Argand-Gauss** ou plano complexo.

Nele, um número complexo $z = a + bi$ é associado ao ponto $P(a, b)$ ou ao vetor que liga a origem $(0, 0)$ até P .

- O eixo horizontal (eixo das abscissas) é chamado de **Eixo Real (Re)**, onde marcamos a parte real a .
- O eixo vertical (eixo das ordenadas) é chamado de **Eixo Imaginário (Im)**, onde marcamos a parte imaginária b .



Essa representação converte a álgebra dos números complexos em **geometria**, permitindo visualizar operações e propriedades de maneira intuitiva. Por exemplo, números reais puros como $z = a + 0i$ estão em cima do eixo horizontal, enquanto imaginários puros como $z = bi$, com $b \neq 0$, ficam no eixo vertical.

1.2.3 Exercícios de Fixação

Exercício — Fixação

1. Determine todos os números reais x e y que satisfazem a igualdade

$$(x + yi)^2 = 8 - 6i.$$

2. Encontre os valores inteiros de x e y que resolvem a equação algébrica

$$(x + yi)^2 = 3 + 4i.$$

3. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$, determine todos os valores de m para os quais o número complexo $z = (m + 2i)^3$ seja um número imaginário puro.

4. Determine os números complexos $z = x + yi$ que satisfazem a equação $z^2 = z$.

5. Calcule o valor exato da expressão

$$E = (1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}.$$

6. Considere o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$. Mostre, utilizando apenas as operações de adição e multiplicação de complexos, que $x = i$ é uma raiz desse polinômio. Em seguida, verifique se $x = -i$ também é raiz.

7. Resolva o seguinte sistema de equações, onde as incógnitas z e w são números complexos, tratando-as algebricamente como variáveis:

$$\begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 2i \end{cases}$$

8. Matrizes com entradas complexas seguem as mesmas regras algébricas. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$, calcule A^2 .

9. Seja $f(n) = i^n + i^{-n}$, definida para todo $n \in \mathbb{Z}$. Calcule o valor da soma

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4).$$

O que você pode inferir sobre a soma de 4 termos consecutivos dessa sequência?

10. Calcule o valor numérico da expressão

$$S = \sum_{k=1}^{2024} i^k + \sum_{k=1}^{2025} i^{-k}.$$

11. Encontre o menor número inteiro positivo n para o qual a potência $(1 + i)^n$ seja um número real.
12. Os axiomas garantem que todo número complexo $z = a + bi$ não nulo possui um inverso multiplicativo z^{-1} . Utilizando apenas a definição da multiplicação dada no texto, isto é, resolvendo a igualdade $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$, deduza a fórmula para as partes real e imaginária de z^{-1} em função de a e b .
13. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Prove algebricamente a identidade

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2).$$

14. **Geometria e rotação.** Seja $z = 3 + 2i$.

(a) Calcule os produtos $z_1 = i \cdot z$, $z_2 = i^2 \cdot z$ e $z_3 = i^3 \cdot z$.

(b) Ao representar z, z_1, z_2 e z_3 no plano de Argand-Gauss, que transformação geométrica o ato de multiplicar por i produz no vetor original?

15. O conjunto dos números complexos forma um corpo, isto é, não possui divisores de zero. Usando as propriedades dos números reais e a definição de igualdade da Seção 1, prove que

$$\text{se } z_1 \cdot z_2 = 0, \text{ então } z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0.$$

1.2.4 Resoluções dos Exercícios

Exercício 1.

Determine todos os números reais x e y que satisfazem a igualdade:

$$(x + yi)^2 = 8 - 6i$$

Resolução.

Expandindo o lado esquerdo:

$$\begin{aligned}(x + yi)^2 &= x^2 + 2xyi + (yi)^2 \\ &= x^2 + 2xyi + y^2(-1) \\ &= (x^2 - y^2) + (2xy)i\end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & \text{(I)} \\ 2xy = -6 \Rightarrow xy = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{x} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):

$$\begin{aligned}x^2 - \left(-\frac{3}{x}\right)^2 &= 8 \\ x^2 - \frac{9}{x^2} &= 8\end{aligned}$$

Como $xy = -3$, temos $x \neq 0$. Multiplicando por x^2 :

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Com $u = x^2$, obtemos $u^2 - 8u - 9 = 0$, logo $u = 9$ ou $u = -1$. Como $u = x^2 \geq 0$, fica $x^2 = 9$, isto é, $x = 3$ ou $x = -3$.

De (II), $y = -3/x$, e portanto $(x, y) = (3, -1)$ ou $(x, y) = (-3, 1)$. ■

Exercício 2.

Encontre os valores inteiros de x e y que resolvem a equação algébrica:

$$(x + yi)^2 = 3 + 4i$$

Resolução.

Expandindo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & \text{(I)} \\ 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}$, da condição $xy = 2$ os pares possíveis são $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$ e $(-2, -1)$. Desses, apenas $(2, 1)$ e $(-2, -1)$ satisfazem $x^2 - y^2 = 3$.

Logo, $(x, y) = (2, 1)$ ou $(x, y) = (-2, -1)$. ■

Exercício 3.

Sabendo que $m \in \mathbb{R}$, determine todos os valores de m para os quais o número complexo $z = (m + 2i)^3$ seja um número imaginário puro.

Resolução.

Pela fórmula $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, temos:

$$\begin{aligned} z &= m^3 + 3m^2(2i) + 3m(2i)^2 + (2i)^3 \\ z &= m^3 + 6m^2i + 3m(4i^2) + 8i^3 \end{aligned}$$

Substituindo $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$:

$$\begin{aligned} z &= m^3 + 6m^2i - 12m - 8i \\ z &= (m^3 - 12m) + (6m^2 - 8)i \end{aligned}$$

Para que z seja imaginário puro, sua parte real deve ser zero e sua parte imaginária deve ser diferente de zero:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) = 0 &\Rightarrow m^3 - 12m = 0 \\ &\Rightarrow m(m^2 - 12) = 0 \end{aligned}$$

Logo $m = 0$ ou $m = \pm 2\sqrt{3}$. Em todos esses casos, $\operatorname{Im}(z) = 6m^2 - 8 \neq 0$, e z é imaginário puro.

$m \in \{0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$. ■

Exercício 4.

Determine os números complexos $z = x + yi$ que satisfazem a equação $z^2 = z$.

Resolução.

Com $z = x + yi$, a equação $z^2 = z$ equivale a

$$(x^2 - y^2) + (2xy)i = x + yi.$$

Igualando as partes real e imaginária, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x & \text{(I)} \\ 2xy = y & \text{(II)} \end{cases}$$

Da (II), $y(2x - 1) = 0$, logo $y = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Caso 1: $y = 0$. Pela (I),

$$x^2 - 0 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

logo $x = 0$ ou $x = 1$, isto é, $z = 0$ ou $z = 1$.

Caso 2: $x = \frac{1}{2}$. Pela (I),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 &= \frac{1}{2} \\ y^2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

o que é impossível em $\mathbb{R}$.

Os únicos números complexos que satisfazem a equação são $z = 0$ e $z = 1$. ■

Exercício 5.

Calcule o valor exato da expressão $E = (1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$.

Resolução.

Temos $(1 + i)^2 = 2i$ e $(1 - i)^2 = -2i$. Logo

$$(1 + i)^{20} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10}, \quad (1 - i)^{20} = (-2i)^{10} = 2^{10}i^{10},$$

pois 10 é par. Portanto $E = 0$. ■

Exercício 6.

Mostre que $x = i$ e $x = -i$ são raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

Resolução.

Calculamos $P(i)$:

$$\begin{aligned} P(i) &= i^4 - 2i^3 + 3i^2 - 2i + 2 \\ &= 1 - 2(-i) + 3(-1) - 2i + 2 \\ &= 1 + 2i - 3 - 2i + 2 \\ &= (1 - 3 + 2) + (2i - 2i) = 0 \end{aligned}$$

Logo $P(i) = 0$, e i é raiz.

Analogamente, calculamos $P(-i)$:

$$\begin{aligned} P(-i) &= (-i)^4 - 2(-i)^3 + 3(-i)^2 - 2(-i) + 2 \\ &= i^4 - 2(-i^3) + 3(i^2) + 2i + 2 \\ &= 1 - 2(-(-i)) + 3(-1) + 2i + 2 \\ &= 1 - 2i - 3 + 2i + 2 \\ &= (1 - 3 + 2) + (-2i + 2i) = 0 \end{aligned}$$

Logo $P(-i) = 0$, e $-i$ também é raiz. ■

Exercício 7.

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} z + iw = 1 & \text{(I)} \\ iz + w = 2i & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolução.

Da (II), $w = 2i - iz$. Substituindo em (I):

$$\begin{aligned} z + i(2i - iz) &= 1 \\ z + 2i^2 - i^2z &= 1 \\ 2z - 2 &= 1 \end{aligned}$$

Logo $z = \frac{3}{2}$. Então

$$w = 2i - i\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{i}{2}.$$

Assim, $z = \frac{3}{2}$ e $w = \frac{i}{2}$. ■

Exercício 8.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$, calcule A^2 .

Resolução.

Calculando A^2 :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (i)(i) + (1)(-1) & (i)(1) + (1)(i) \\ (-1)(i) + (i)(-1) & (-1)(1) + (i)(i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i^2 - 1 & i + i \\ -i - i & -1 + i^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 - 1 & 2i \\ -2i & -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ -2i & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ -2i & -2 \end{pmatrix}$. ■

Exercício 9.

Seja $f(n) = i^n + i^{-n}$. Calcule $S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$.

Resolução.

Temos:

$$\begin{aligned} f(1) &= i^1 + i^{-1} = i + (-i) = 0 \\ f(2) &= i^2 + i^{-2} = -1 + (-1) = -2 \\ f(3) &= i^3 + i^{-3} = -i + i = 0 \\ f(4) &= i^4 + i^{-4} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Somando os termos: $S = 0 - 2 + 0 + 2 = 0$. Como i^n (e, portanto, $f(n)$) tem período 4, a soma em qualquer bloco de 4 termos consecutivos é sempre 0. ■

Exercício 10.

Calcule o valor numérico de $S = \sum_{k=1}^{2024} i^k + \sum_{k=1}^{2025} i^{-k}$.

Resolução.

Como $\sum_{j=1}^4 i^j = 0$ e 2024 é múltiplo de 4, segue que

$$\sum_{k=1}^{2024} i^k = 0.$$

Além disso,

$$\sum_{k=1}^{2025} i^{-k} = \left(\sum_{k=1}^{2024} i^{-k} \right) + i^{-2025} = i^{-2025},$$

pois 2024 também é múltiplo de 4. Como $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, temos $i^{-2025} = i^{-1} = -i$.

Logo $S = -i$. ■

Exercício 11.

Encontre o menor $n \in \mathbb{Z}_+^*$ para que $(1 + i)^n$ seja real.

Resolução.

Como $(1 + i)^2 = 2i$, calculamos as potências seguintes:

$$n = 2 \Rightarrow (1 + i)^2 = 2i \quad (\text{imaginário puro})$$

$$n = 3 \Rightarrow (1 + i)^3 = (2i)(1 + i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i \quad (\text{complexo})$$

$$n = 4 \Rightarrow (1 + i)^4 = ((1 + i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4 \quad (\text{real})$$

Logo o menor inteiro positivo é $n = 4$. ■

Exercício 12.

Deduza a fórmula de z^{-1} .

Resolução.

Seja $z = a + bi \neq 0$ e seu inverso $z^{-1} = x + yi$. Pela definição:

$$(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i$$

$$(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$$

Igualando as partes reais e imaginárias:

$$\begin{cases} ax - by = 1 & \text{(I)} \\ bx + ay = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por a e (II) por b :

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações: $x(a^2 + b^2) = a$. Como $z \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, logo $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

Substituindo x na equação (II):

$$b \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) + ay = 0 \Rightarrow ay = -\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

Dividindo por a (se $a \neq 0$), obtemos $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$. (Se $a = 0$, a equação I nos dá diretamente $y = -\frac{1}{b}$, o que concorda com a fórmula).

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i. \blacksquare$$

Exercício 13.

Prove que $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$.

Resolução.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Logo

$$\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = ac - bd = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2).$$

■

Exercício 14.

Rotação de $z = 3 + 2i$.

Resolução.

(a) Calculando os produtos:

$$z_1 = i(3 + 2i) = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$$

$$z_2 = i^2(3 + 2i) = -1(3 + 2i) = -3 - 2i$$

$$z_3 = i^3(3 + 2i) = -i(3 + 2i) = -3i - 2i^2 = 2 - 3i$$

(b) Geometricamente, multiplicar um complexo por i corresponde a uma **rotação de 90° no sentido anti-horário** em torno da origem no plano de Argand-Gauss. Assim, z_2

é a rotação de 180° e z_3 a rotação de 270° . ■

Exercício 15.

Prove que se $z_1 \cdot z_2 = 0$, então $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.

Resolução.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. A condição $z_1 \cdot z_2 = 0$ equivale a

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 0 + 0i$$

e, portanto, ao sistema

$$\begin{cases} ac - bd = 0 & \text{(I)} \\ ad + bc = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos (I) por c e (II) por d :

$$\begin{cases} ac^2 - bcd = 0 \\ ad^2 + bcd = 0 \end{cases}$$

Somando ambas: $a(c^2 + d^2) = 0$.

Se $z_2 \neq 0$, então $c^2 + d^2 \neq 0$, e a igualdade acima implica $a = 0$. Com $a = 0$ e $z_2 \neq 0$, o sistema original dá $-bd = 0$ e $bc = 0$. Como c e d não podem ser simultaneamente nulos, segue $b = 0$, isto é, $z_1 = 0$. Por simetria, se $z_1 \neq 0$, concluímos $z_2 = 0$. ■

— ◇ —

1.3 Conjugado e Módulo

O conjugado e o módulo conectam a forma algébrica $a + bi$ à geometria do plano e reaparecem em todos os capítulos seguintes.

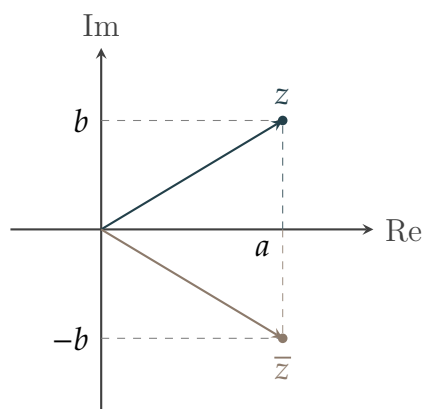
1.3.1 Conjugado de um Número Complexo

Definição 1.6. — Conjugado

Seja $z = a + bi$ um número complexo. O **conjugado** de z , denotado por $\bar{z}$ (ou z^*), é definido por:

$$\bar{z} = a - bi$$

Geometricamente, o conjugado corresponde à reflexão do ponto z em relação ao eixo real.



Exemplo — Conjugados de números complexos

Encontre os conjugados:

$$\begin{aligned}\overline{(3 + 4i)} &= 3 - 4i, \\ \overline{5} &= 5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{(-2 - 7i)} &= -2 + 7i, \\ \overline{3i} &= -3i.\end{aligned}$$

1.3.2 Propriedades do Conjugado

Propriedade 1.3. Conjugado

Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ números complexos quaisquer:

1. $\overline{(\bar{z})} = z$ (conjugado do conjugado)
2. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
3. $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$

$$4. z = -\bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$5. z = \bar{z} \Leftrightarrow z \text{ é real}$$

$$6. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (\text{distributividade na soma})$$

$$7. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (\text{distributividade no produto})$$

$$8. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \text{ para } z_2 \neq 0$$

$$9. \overline{z^n} = (\bar{z})^n, \text{ para } n \in \mathbb{Z}, \text{ com } z \neq 0 \text{ se } n < 0$$

As propriedades acima podem ser provadas diretamente da definição algébrica. Demostremos as principais, pois elas formam a base de todas as manipulações que faremos ao longo do livro. Nos resultados a seguir, fixamos sempre $z = a + bi$ (com $a, b \in \mathbb{R}$).

Propriedade 1: $\overline{(\bar{z})} = z$. O conjugado de $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$. Conjugando de novo:

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z. \quad \blacksquare$$

Propriedade 2: $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$. Somando z ao seu conjugado:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z). \quad \blacksquare$$

Propriedade 3: $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$. Subtraindo o conjugado:

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2i \cdot \operatorname{Im}(z). \quad \blacksquare$$

Propriedade 5: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. ($\Rightarrow$) Se $z = \bar{z}$, então $a + bi = a - bi$, logo $2bi = 0$, ou seja, $b = 0$ e z é real. ($\Leftarrow$) Se z é real, então $b = 0$ e $\bar{z} = a = z$. ■

Propriedade 6: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. A soma é $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$. Conjugando:

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \quad \blacksquare$$

Propriedade 7: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. O produto é $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, logo:

$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

Por outro lado, calculamos o produto dos conjugados:

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a - bi)(c - di) \\ &= ac - adi - bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i.\end{aligned}$$

As expressões são rigorosamente iguais. ■

A propriedade 4 ($z = -\bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$) segue raciocínio análogo à Propriedade 5. Em particular, para $z \neq 0$, essa condição equivale a dizer que z é imaginário puro. As propriedades 8 e 9 (conjugado do quociente e da potência) são consequências diretas das Propriedades 6 e 7 e ficam como exercício ao leitor.

A Propriedade 5 fornece um critério prático de realidade: z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$.

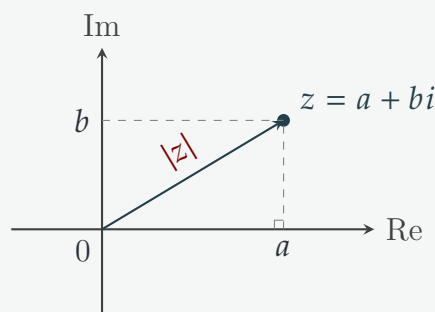
1.3.3 Módulo de um Número Complexo

Definição 1.7. — Módulo

Seja $z = a + bi$ um número complexo. O **módulo** (ou valor absoluto) de z , denotado por $|z|$, é definido por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometricamente, $|z|$ representa a distância da origem até o ponto (a, b) no plano complexo.



Exemplo — Cálculo de módulos

Calcule os módulos:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Note que o módulo de um número complexo é sempre um número **real não-negativo**:

$$|z| \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

1.3.4 Propriedades do Módulo

Propriedade 1.4. Módulo

Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ números complexos quaisquer:

1. $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ e $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$
3. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (**identidade central**)
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (módulo do produto)
6. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, para $z_2 \neq 0$
7. $|z^n| = |z|^n$, para $n \in \mathbb{Z}$, com $z \neq 0$ se $n < 0$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (**Desigualdade Triangular**)
9. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
10. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (**forma completa**)
11. $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$
12. $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ (forma polar: $2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$ — ver Capítulo 2)
13. Se $z_2 \neq 0$, então $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$
14. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (**Lei do Paralelogramo**)

$$15. |az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

⚠ Atenção — Módulo da soma

Em geral, $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. A igualdade só ocorre quando um dos números é zero ou, sendo ambos não nulos, existe $\lambda > 0$ tal que $z_1 = \lambda z_2$.

A propriedade 4 será usada repetidamente nas seções seguintes. Demonstramos algumas identidades centrais.

Propriedade 3: $|z| = |\bar{z}| = |-z|$. Se $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$ e $-z = -a - bi$. Logo:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|. \quad \blacksquare$$

Propriedade 4: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Multiplicando $z = a + bi$ pelo seu conjugado $\bar{z} = a - bi$:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Propriedade 5: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Elevamos o lado esquerdo ao quadrado e usamos a Propriedade 4 junto com a comutatividade e o conjugado do produto:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} \\ &= z_1 z_2 \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ &= (z_1 \bar{z}_1) (z_2 \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada (ambos os lados são não-negativos), obtemos $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. ■

Propriedade 6: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$. Seja $w = \frac{z_1}{z_2}$, de modo que $z_1 = w \cdot z_2$. Pela Propriedade 5:

$$|z_1| = |w \cdot z_2| = |w| \cdot |z_2|.$$

Como $z_2 \neq 0$, temos $|z_2| > 0$ e podemos dividir:

$$|w| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad \blacksquare$$

Propriedade 11: $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$. Usando a Propriedade 4 ($|w|^2 = w\overline{w}$), calculamos a expansão do módulo da soma:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{(z_1 \overline{z_2})} + |z_2|^2 \end{aligned}$$

Como a soma de um número com seu conjugado resulta no dobro de sua parte real ($w + \overline{w} = 2 \operatorname{Re}(w)$), temos:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

A demonstração para $|z_1 - z_2|^2$ é análoga, alterando apenas o sinal. ■

Propriedade 8: Desigualdade Triangular. Pela Propriedade 11, temos:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

Pela Propriedade 2, a parte real de um número nunca excede o seu módulo. Portanto:

$$\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| |\overline{z_2}| = |z_1| |z_2|$$

Substituindo na expressão original:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Como ambos os lados são positivos, extraindo a raiz quadrada:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \blacksquare$$

As demais propriedades listadas são consequências diretas destas ou exploram a forma trigonométrica (como a Propriedade 12), que abordaremos em detalhes mais à frente. A identidade $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ sustenta a divisão em $\mathbb{C}$ — ver Seção 1.4.

Exemplo — Identidade do Paralelogramo

Prove a identidade $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ para quaisquer números complexos z_1, z_2 .

Resolução. Usando a propriedade fundamental $|w|^2 = w\overline{w}$:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2) + (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

Interpretação geométrica: A soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados de seus quatro lados.

Exemplo — Fração Real a partir de Módulos Unitários

Prove que se $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1 z_2 \neq -1$, então a expressão $A = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ é um número real.

Resolução. Se $|z_1| = 1$, então $z_1 \overline{z_1} = 1$, o que implica que $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$. O mesmo vale para z_2 . Para provar que A é real, basta demonstrar que ele é igual ao seu conjugado ($\overline{A} = A$).

$$\overline{A} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por $z_1 z_2$:

$$\overline{A} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = A$$

Como $\overline{A} = A$, a expressão resulta necessariamente em um número real.

Exemplo — Análise de Extremos de Módulo

Seja a um número real positivo e defina o conjunto $M_a = \{z \in \mathbb{C}^* : |z + \frac{1}{z}| = a\}$. Determine os valores mínimo e máximo de $|z|$ quando $z \in M_a$.

Resolução. Elevando ao quadrado e usando $|w|^2 = w\overline{w}$, obtemos:

$$a^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right) \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$a^2 = z\overline{z} + \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z\overline{z}}$$

Lembrando da relação fundamental $z\overline{z} = |z|^2$, substituímos nos extremos da soma:

$$a^2 = |z|^2 + \frac{z^2 + \overline{z}^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} \implies a^2 = \frac{|z|^4 + (z^2 + \overline{z}^2) + 1}{|z|^2}$$

Do produto notável $(z + \bar{z})^2 = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2$, temos $z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2$.

Substituindo no numerador e reunindo os termos de $|z|$:

$$a^2 = \frac{|z|^4 - 2|z|^2 + 1 + (z + \bar{z})^2}{|z|^2}$$

Note que os três primeiros termos formam um produto notável: $(|z|^2 - 1)^2$. Com isso:

$$a^2 = \frac{(|z|^2 - 1)^2 + (z + \bar{z})^2}{|z|^2} = \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|} \right)^2 + \frac{(z + \bar{z})^2}{|z|^2}$$

Como $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$, a parcela $(z + \bar{z})^2$ é não negativa. Logo

$$a^2 \geq \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|} \right)^2$$

Como $a > 0$, extraindo a raiz quadrada ($\sqrt{x^2} = |x|$):

$$a \geq \left| \frac{|z|^2 - 1}{|z|} \right| \implies \left| |z| - \frac{1}{|z|} \right| \leq a$$

Equivalentemente:

$$-a \leq |z| - \frac{1}{|z|} \leq a$$

Como $|z| > 0$, multiplicando por $|z|$:

$$-a|z| \leq |z|^2 - 1 \leq a|z|$$

Obtemos duas inequações reais em função de $|z|$:

$$\begin{cases} |z|^2 - a|z| - 1 \leq 0 & \text{(I)} \\ |z|^2 + a|z| - 1 \geq 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

As raízes da equação associada a (I) são $\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$. A parábola correspondente tem concavidade para cima, logo, para que seja menor ou igual a zero, $|z|$ deve estar entre as raízes. Uma vez que $|z| > 0$ sempre:

$$|z| \leq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

As raízes da equação associada a (II) são $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$. Para ser maior ou igual a zero, $|z|$ deve estar fora do intervalo entre as raízes. Como a raiz menor é negativa e $|z| > 0$,

ficamos com a restrição impondo apenas a raiz maior:

$$|z| \geq \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Combinando essas duas desigualdades, obtemos os limitantes restritivos para o módulo de z :

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \leq |z| \leq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Os extremos são atingidos. Igualdade ocorre quando $(z + \bar{z})^2 = 0$, isto é, $\operatorname{Re}(z) = 0$:

$$(z + \bar{z})^2 = 0 \implies z + \bar{z} = 0 \implies \operatorname{Re}(z) = 0$$

Logo z está no eixo imaginário. Como $z \neq 0$, seja $z = yi$, com $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Verificando: com $z = yi$,

$$\left| yi + \frac{1}{yi} \right| = a \implies \left| yi - \frac{i}{y} \right| = a \implies \left| i \left(y - \frac{1}{y} \right) \right| = a \implies \left| y - \frac{1}{y} \right| = a$$

Isso gera explicitamente as equações $y^2 - ay - 1 = 0$ e $y^2 + ay - 1 = 0$. As raízes $|y|$ (que representam $|z|$) são reais e idênticas aos limitantes que deduzimos. Como as soluções de y existem, confirmamos que, de fato, os extremos são máximos e mínimos absolutos.

$$\text{Mínimo: } |z| = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad \text{Máximo: } |z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Exemplo — Equação com Módulo e o Próprio Número

Resolva a equação $z + |z| = 2 + i$.

Resolução. Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + yi = 2 + i.$$

Pela igualdade de números complexos,

$$y = 1 \quad \text{e} \quad x + \sqrt{x^2 + 1} = 2.$$

Logo $\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x$, de modo que $x \leq 2$, e

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= (2 - x)^2, \\ 4x &= 3, \\ x &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Como $\frac{3}{4} \leq 2$, segue que

$$z = \frac{3}{4} + i.$$

Exemplo — Fração Imaginária Pura a partir de Módulos Unitários

Sejam z_1 e z_2 números complexos distintos e não opostos tais que $|z_1| = |z_2| = 1$. Prove que a expressão $Z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ é um número imaginário puro.

Resolução. De $|z_1| = |z_2| = 1$ segue que $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ e $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$. Basta provar que $\overline{Z} = -Z$:

$$\begin{aligned}\overline{Z} &= \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}} \\ &= \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} = -\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = -Z.\end{aligned}$$

Logo Z tem parte real nula. Além disso, $z_1 \neq z_2$ garante que o denominador não zere, e $z_1 \neq -z_2$ garante que o numerador não zere. Portanto $Z \neq 0$, isto é, Z é imaginário puro.

Exemplo — Extremos Geométricos e a Desigualdade Triangular

Sabendo que $|z - 3 - 4i| = 2$, determine os valores máximo e mínimo que $|z|$ pode assumir.

Resolução Analítica. Temos

$$|z| = |(z - 3 - 4i) + (3 + 4i)|.$$

Pela Desigualdade Triangular,

$$|z| \leq |z - 3 - 4i| + |3 + 4i| = 2 + 5 = 7.$$

Pela forma reversa,

$$|z - (3 + 4i)| \geq ||z| - |3 + 4i||$$

e, como $|3 + 4i| = 5$,

$$2 \geq ||z| - 5|.$$

Portanto,

$$3 \leq |z| \leq 7.$$

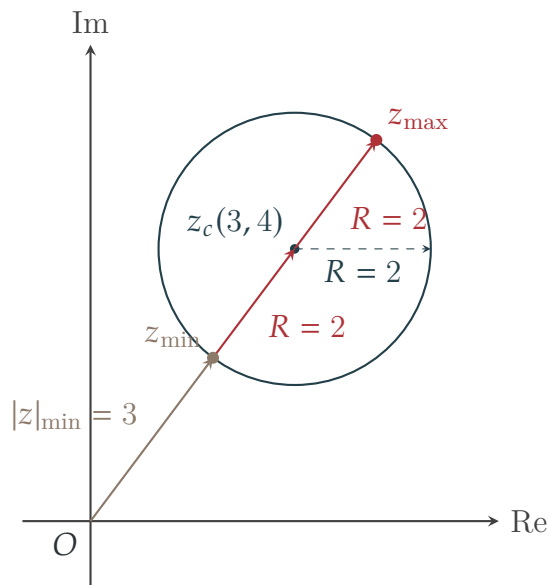
Resolução Geométrica. A equação $|z - (3 + 4i)| = 2$ representa a circunferência de centro $z_c = 3 + 4i$ e raio 2. Como $|z|$ é a distância da origem a um ponto dessa circunferência e

$$|z_c| = |3 + 4i| = 5,$$

os extremos ocorrem sobre a reta que liga a origem ao centro. Assim,

$$|z|_{\min} = 5 - 2 = 3, \quad |z|_{\max} = 5 + 2 = 7.$$

A figura abaixo ilustra essa situação:



Exemplo — Igualdade Múltipla e Resolução via Propriedades

Determine todos os números complexos z que satisfazem a equação $z^2 + |z| = 0$.

Resolução. Usamos apenas propriedades de módulo, sem escrever z na forma $x + yi$. Isolamos z^2 :

$$z^2 = -|z|$$

Aplicamos o módulo em ambos os lados da equação:

$$|z^2| = |-|z||$$

Pelas Propriedades 3 e 7, sabemos que $|z^2| = |z|^2$. Além disso, o módulo de um número real negativo (ou nulo) é o seu valor absoluto. Como $|z|$ já é uma quantidade real não-negativa, o lado direito fica simplesmente $|z|$:

$$|z|^2 = |z|$$

$$|z|^2 - |z| = 0 \implies |z|(|z| - 1) = 0$$

Isso nos dá duas possibilidades para o módulo de z :

Caso 1: $|z| = 0 \implies z = 0$. (Verificando na equação original: $0^2 + 0 = 0$. Solução válida).

Caso 2: $|z| = 1$. Substituindo essa informação de volta na equação isolada $z^2 = -|z|$:

$$z^2 = -1 \implies z = i \text{ ou } z = -i$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{0, i, -i\}$.

Exemplo — Relação entre Módulos e Geometria de Polígonos

Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos não nulos tais que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que a distância entre quaisquer dois desses afijos é $R\sqrt{3}$.

Resolução. A distância entre os afijos z_1 e z_2 é $|z_1 - z_2|$. Portanto,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} \\ &= 2R^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}). \end{aligned}$$

Da condição $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, temos $z_3 = -(z_1 + z_2)$; logo

$$\begin{aligned} R^2 &= |z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \\ &= 2R^2 + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}), \end{aligned}$$

e portanto $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = -R^2$. Substituindo,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= 2R^2 - (-R^2) = 3R^2, \\ |z_1 - z_2| &= R\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Pela simetria do problema, o mesmo vale para $|z_2 - z_3|$ e $|z_3 - z_1|$.

Interpretação geométrica: z_1, z_2 e z_3 são, necessariamente, os vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio R centrada na origem.



1.4 Divisão de Números Complexos

1.4.1 Técnica de Racionalização

Definição 1.8. — Divisão de números complexos

Para $z_2 \neq 0$, o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é o único número complexo w tal que $z_1 = z_2 \cdot w$. Explicitamente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Exemplo — Divisão na forma algébrica

Calcule $\frac{3+4i}{1-2i}$.

Multiplicamos numerador e denominador por $\overline{(1-2i)} = 1+2i$:

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1+4} = \frac{3+10i-8}{5} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i.$$

1.4.2 Inverso Multiplicativo

Propriedade 1.5. *Fórmula do inverso multiplicativo*

Para $z = a + bi \neq 0$, o inverso multiplicativo é:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Demonstração. Queremos encontrar $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1$. Multiplicando ambos os lados por $\overline{z}$:

$$z \cdot \overline{z} \cdot w = \overline{z} \implies |z|^2 \cdot w = \overline{z} \implies w = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Como $z \neq 0$, temos $|z|^2 > 0$ e a divisão está bem definida. Substituindo $\overline{z} = a - bi$ e $|z|^2 =$

$a^2 + b^2$:

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

■

Exemplo — Cálculo de inverso

Determine z^{-1} para $z = 2 + 3i$.

Temos $|z|^2 = 4 + 9 = 13$ e $\bar{z} = 2 - 3i$, logo:

$$z^{-1} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

Exemplo — Divisão com variáveis

Se $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$, determine z na forma $a + bi$.

Primeiro, $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Então:

$$z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i + 2i^2}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i.$$

Exemplo — Expressão trigonométrica: real puro ou imaginário puro?

Determine os valores reais de θ para os quais a expressão

$$z = \frac{3 + 2i \operatorname{sen} \theta}{1 - 2i \operatorname{sen} \theta}$$

é (a) puramente real; (b) puramente imaginária.

Resolução. Multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3 + 2i \operatorname{sen} \theta)(1 + 2i \operatorname{sen} \theta)}{(1 - 2i \operatorname{sen} \theta)(1 + 2i \operatorname{sen} \theta)} = \frac{3 + 6i \operatorname{sen} \theta + 2i \operatorname{sen} \theta + 4i^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \frac{(3 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta) + 8i \operatorname{sen} \theta}{1 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta}. \end{aligned}$$

Separando partes real e imaginária:

$$z = \underbrace{\frac{3 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta}}_{\operatorname{Re}(z)} + i \underbrace{\frac{8 \operatorname{sen} \theta}{1 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta}}_{\operatorname{Im}(z)}.$$

(a) Para z puramente real: $\operatorname{Im}(z) = 0 \implies \frac{8 \operatorname{sen} \theta}{1 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta} = 0 \implies \operatorname{sen} \theta = 0$. Logo:

$$\theta = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Para z puramente imaginário: $\operatorname{Re}(z) = 0 \implies 3 - 4 \sin^2 \theta = 0 \implies \sin^2 \theta = \frac{3}{4}$.

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \sin \frac{\pi}{3}.$$

Logo:

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Nesses casos,

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{8 \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{3} \neq 0,$$

de modo que z é de fato puramente imaginário.

◇

1.5 Equações no Corpo dos Complexos

1.5.1 Equações Lineares com Conjugado

Definição 1.9. — Equação linear com conjugado

Uma **equação linear complexa com conjugado** tem a forma:

$$\alpha z + \beta \bar{z} = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Para resolver $\alpha z + \beta \bar{z} = \gamma$, podemos escrever $z = x + yi$ e separar parte real e parte imaginária, obtendo um sistema linear 2×2 em x e y . Outra possibilidade é conjugar a equação inteira e resolver o sistema em z e $\bar{z}$.

Exemplo — Equação linear com conjugado

Resolva $2z + 3\bar{z} = 7 + i$.

Resolução. Seja $z = x + yi$. Então $\bar{z} = x - yi$ e:

$$2(x + yi) + 3(x - yi) = 7 + i \implies (5x) + (-y)i = 7 + i.$$

Separando: $5x = 7$ e $-y = 1$, logo $x = \frac{7}{5}$ e $y = -1$. Portanto $z = \frac{7}{5} - i$.

Exemplo — Método do conjugado (alternativo)

Resolva $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 4$.

Resolução. A equação original é:

$$(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 4. \quad (\text{I})$$

Conjugando ambos os lados:

$$(1 - i)\bar{z} + (1 + i)z = 4. \quad (\text{II})$$

Neste caso, (I) e (II) são idênticas, e a equação admite infinitas soluções com $\operatorname{Re}((1 + i)z) = 2$. Fazendo $z = x + yi$:

$$(1 + i)(x + yi) = (x - y) + (x + y)i.$$

Parte real = 2: $x - y = 2$. Portanto $z = x + (x - 2)i$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Em provas mais técnicas, a manipulação direta com z e $\bar{z}$ costuma ser mais rápida que a substituição por $x + yi$. Conjugando

$$\alpha z + \beta \bar{z} = \gamma,$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha z + \beta \bar{z} = \gamma \\ \bar{\beta} z + \bar{\alpha} \bar{z} = \bar{\gamma}, \end{cases}$$

e, multiplicando a primeira equação por $\bar{\alpha}$ e a segunda por β , segue

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)z = \gamma\bar{\alpha} - \beta\bar{\gamma}.$$

Quando $|\alpha|^2 \neq |\beta|^2$, concluímos

$$z = \frac{\gamma\bar{\alpha} - \beta\bar{\gamma}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}.$$

1.5.2 Raiz Quadrada de um Número Complexo

Para resolver equações quadráticas em $\mathbb{C}$, extraímos raízes quadradas de números complexos. Com $w = x + yi$ e $w^2 = a + bi$, obtemos um **sistema real** resolvível via módulo.

Para encontrar w tal que $w^2 = a + bi$, seja $w = x + yi$ (onde $x, y \in \mathbb{R}$) e expandimos:

$$w^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

Igualando a parte real e a parte imaginária do resultado a $a + bi$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

A relação $|w^2| = |a + bi|$ fornece a terceira equação $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Somando a primeira e a terceira equações, encontramos x^2 e y^2 rapidamente. A equação $2xy = b$ serve puramente para definir os **sinais relativos** : se $b > 0$, x e y terão o mesmo sinal; se $b < 0$, terão sinais opostos.

No caso degenerado $b = 0$, o problema se reduz ao caso de uma raiz real ou puramente imaginária, conforme o sinal de a .

⚠ Atenção — Raiz quadrada complexa

Todo número complexo não nulo possui exatamente duas raízes quadradas, w e $-w$. Ao resolver equações, ambas devem ser consideradas.

Exemplo — Raiz quadrada de um complexo

Determine as raízes quadradas de $z = 3 + 4i$.

Resolução. Seja $w = x + yi$ com $w^2 = 3 + 4i$. Igualando partes real e imaginária, e usando o módulo, obtemos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = |3 + 4i| = 5 & (3) \end{cases}$$

Somando (1) e (3), segue que

$$2x^2 = 8,$$

de modo que $x^2 = 4$ e portanto $x = \pm 2$.

De (2), temos $xy = 2 > 0$, logo x e y têm o mesmo sinal. Se $x = 2$, então $y = 1$. Se $x = -2$, então $y = -1$.

Assim, as raízes quadradas de $3 + 4i$ são

$$\pm(2 + i).$$

Exemplo — Equação quadrática com discriminante complexo

Resolva $z^2 - 2z + (1 + i) = 0$.

Resolução. Usando a fórmula quadrática:

$$\Delta = 4 - 4(1 + i) = -4i.$$

Calculamos $\sqrt{-4i}$. Seja $w = x + yi$ com $w^2 = -4i$. Então

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -4 & (2) \\ x^2 + y^2 = |-4i| = 4 & (3) \end{cases}$$

De (1), segue que $x^2 = y^2$. Combinando isso com (3), obtemos

$$2x^2 = 4,$$

logo $x = \pm\sqrt{2}$.

De (2), temos $xy = -2 < 0$, portanto x e y têm sinais opostos. Se $x = \sqrt{2}$, então $y = -\sqrt{2}$; se $x = -\sqrt{2}$, então $y = \sqrt{2}$.

Logo $\sqrt{-4i} = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$ e:

$$z = \frac{2 \pm (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

1.5.3 A Equação Quadrática Geral em $\mathbb{C}$

A equação quadrática $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, resolve-se completando o quadrado:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

Usando a mesma álgebra de “completar o quadrado” que aprendemos nos números reais, multiplicamos ambos os lados por 4α :

$$4\alpha^2 z^2 + 4\alpha\beta z + 4\alpha\gamma = 0$$

Adicionando e subtraindo β^2 :

$$(4\alpha^2 z^2 + 4\alpha\beta z + \beta^2) - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0$$

$$(2\alpha z + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Definindo o discriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, chegamos à forma equivalente:

$$(2\alpha z + \beta)^2 = \Delta$$

Seja w uma das raízes quadradas complexas de Δ (calculada com o método da seção anterior, tal que $w^2 = \Delta$). Então:

$$2\alpha z + \beta = \pm w \implies z = \frac{-\beta \pm w}{2\alpha}$$

A clássica fórmula resolvente continua válida no corpo $\mathbb{C}$. A única adaptação é que, se Δ for um complexo não real ou um real negativo, calculamos $w = \sqrt{\Delta}$ utilizando nosso sistema algébrico.

Exemplo — Equação quadrática $z^2 + iz + 2 = 0$

Resolva $z^2 + iz + 2 = 0$.

Resolução. Identificamos $\alpha = 1$, $\beta = i$ e $\gamma = 2$. O discriminante é:

$$\Delta = i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -1 - 8 = -9.$$

Como $\Delta = -9$ é real negativo, sua raiz quadrada é $\sqrt{-9} = 3i$. Portanto:

$$z = \frac{-i \pm 3i}{2}.$$

As raízes são:

$$z_1 = \frac{-i + 3i}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-i - 3i}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i.$$

1.5.4 O Caso Específico: Equações Reais com $\Delta < 0$

Quando os coeficientes α, β, γ são números reais, mas o discriminante resulta em $\Delta < 0$, o processo é direto. A raiz quadrada de Δ será $\sqrt{-|\Delta|} = i\sqrt{|\Delta|}$.

$$z = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$$

Note que as raízes formarão um **par de complexos conjugados**. Se z_1 é raiz, $\overline{z_1}$ obrigato-

riamente também será.

Exemplo — Equação real com $\Delta < 0$

Determine as raízes de $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Resolução. $\Delta = 4 - 20 = -16$, logo:

$$z = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

As raízes são $z_1 = -1 + 2i$ e $z_2 = -1 - 2i = \overline{z_1}$.

1.5.5 Sistemas com Variáveis Complexas

Exemplo — Sistema usando módulo e conjugado

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} z + w = 3 \\ z \cdot w = 4 - i \end{cases}$$

Resolução. z e w são raízes de $t^2 - 3t + (4 - i) = 0$. $\Delta = 9 - 4(4 - i) = 9 - 16 + 4i = -7 + 4i$.

Calculando $\sqrt{-7 + 4i}$: se $u = a + bi$ com $u^2 = -7 + 4i$:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = 4, \\ a^2 + b^2 = \sqrt{65}. \end{cases}$$

De $a^2 - b^2 = -7$ e $a^2 + b^2 = \sqrt{65}$:

$$a^2 = \frac{\sqrt{65} - 7}{2}, \quad b^2 = \frac{\sqrt{65} + 7}{2}.$$

Com $ab = 2 > 0$, as raízes quadradas de $-7 + 4i$ são $\pm u$, onde

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{65} - 7}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{65} + 7}{2}}.$$

Logo

$$\{z, w\} = \left\{ \frac{3+u}{2}, \frac{3-u}{2} \right\}.$$

Portanto, os pares ordenados são

$$(z, w) = \left(\frac{3+u}{2}, \frac{3-u}{2} \right) \quad \text{ou} \quad (z, w) = \left(\frac{3-u}{2}, \frac{3+u}{2} \right).$$

◇

1.6 Representação Geométrica e Lugar Geométrico

Ao número complexo $z = a + bi$ associamos o ponto (a, b) do **plano de Argand-Gauss**. Nesta seção, usaremos três leituras básicas. A expressão $|z - z_0|$ mede a distância de z ao ponto z_0 ; equações com $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ impõem restrições lineares; e a forma

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R},$$

descreve figuras afins simples. Essas três ideias bastam para reconhecer a maior parte dos lugares geométricos elementares do plano complexo.

1.6.1 Circunferências e Discos

Propriedade 1.6. *Circunferências e discos no plano complexo*

Os lugares geométricos circulares mais frequentes no plano complexo são:

1. $|z - z_0| = r \longrightarrow$ circunferência de centro z_0 e raio r
2. $|z - z_0| < r \longrightarrow$ disco aberto de centro z_0 e raio r
3. $|z - z_0| \leq r \longrightarrow$ disco fechado de centro z_0 e raio r

Justificativa algébrica para $|z - z_0| = r$. Seja $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$. Então

$$|z - z_0| = r \implies |z - z_0|^2 = r^2 \implies (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Essa é exatamente a equação de uma circunferência de centro (a, b) e raio r no plano cartesiano. ■

Exemplo — Identificar o lugar geométrico

Descreva geometricamente o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| = 3\}$.

Resolução. Temos $|z - (2 - i)| = 3$. Logo S é a circunferência de centro $2 - i$ e raio 3.

1.6.2 Retas, Segmentos e Semirretas

Propriedade 1.7. *Equações de retas no plano complexo*

Retas podem ser descritas usando parte real e imaginária:

1. $\operatorname{Re}(z) = k \longrightarrow$ reta vertical $x = k$
2. $\operatorname{Im}(z) = k \longrightarrow$ reta horizontal $y = k$
3. $\operatorname{Re}(\alpha z) = c$ (com $\alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$) $\longrightarrow$ reta genérica

Propriedade 1.8. *Parametrização afim de retas, segmentos e semirretas*

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos. Então:

1. $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, com $t \in \mathbb{R}$, descreve a reta que passa por z_1 e z_2
2. $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, com $t \in [0, 1]$, descreve o segmento de extremidades z_1 e z_2
3. $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, com $t \geq 0$, descreve a semirreta de origem z_1 e direção $z_2 - z_1$

Leitura cartesiana da parametrização. Escrevendo $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ e $z = x + yi$, obtemos

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1).$$

Essas são as equações paramétricas usuais da reta que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . As restrições sobre t selecionam o segmento ou a semirreta correspondentes. ■

Exemplo — Reta via parte real

Mostre que $\operatorname{Re}((1 - i)z) = 2$ define uma reta e determine sua equação.

Resolução. Com $z = x + yi$,

$$(1 - i)(x + yi) = (x + y) + (y - x)i.$$

Logo $\operatorname{Re}((1-i)z) = x + y$. A condição $x + y = 2$ define a reta

$$y = -x + 2.$$

Exemplo — Reta, segmento e semirreta por parâmetro real

Considere

$$z = 1 - i + t(2 + 3i), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Descreva a reta correspondente e identifique o segmento e a semirreta obtidos ao restringir t .

Resolução. Escrevendo $z = x + yi$, temos

$$x = 1 + 2t, \quad y = -1 + 3t.$$

Eliminando t ,

$$t = \frac{x-1}{2} \implies y = -1 + \frac{3}{2}(x-1),$$

isto é,

$$3x - 2y = 5.$$

Para $t \in [0, 1]$, obtemos o segmento de extremidades $1 - i$ e $3 + 2i$. Para $t \geq 0$, obtemos a semirreta de origem $1 - i$ na direção de $2 + 3i$.

1.6.3 Mediatrizes, Semiplanos e o Círculo de Apolônio

Igualdade de distâncias costuma produzir mediatrizes; uma desigualdade escolhe um dos semiplanos; uma razão constante conduz ao círculo de Apolônio.

Propriedade 1.9. *Mediatriz, semiplano e círculo de Apolônio*

A relação entre as distâncias de z a dois pontos fixos gera retas ou círculos bem definidos:

1. $|z - z_1| = |z - z_2| \implies$ mediatriz do segmento $z_1 z_2$
2. $|z - z_1| < |z - z_2| \implies$ semiplano aberto mais próximo de z_1
3. $|z - z_1| = k|z - z_2|$ (com $k \in \mathbb{R}_+^*$, $k \neq 1$) $\implies$ círculo de Apolônio

O círculo de Apolônio é o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante.

Derivação do círculo de Apolônio. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos e $k > 0$, $k \neq 1$. Queremos o lu-

gar geométrico de $|z - z_1| = k|z - z_2|$. Elevando ao quadrado,

$$|z - z_1|^2 = k^2|z - z_2|^2.$$

Usando $|w|^2 = w\overline{w}$,

$$\begin{aligned}(z - z_1)(\overline{z} - \overline{z_1}) &= k^2(z - z_2)(\overline{z} - \overline{z_2}), \\ |z|^2 - z\overline{z_1} - \overline{z}z_1 + |z_1|^2 &= k^2(|z|^2 - z\overline{z_2} - \overline{z}z_2 + |z_2|^2).\end{aligned}$$

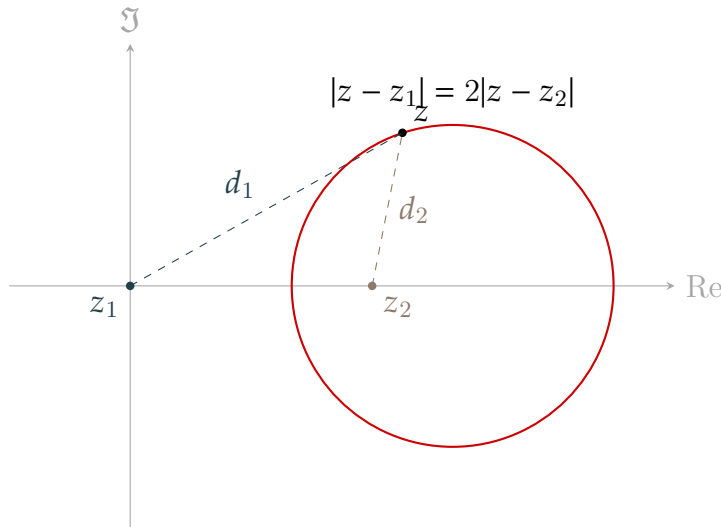
Reorganizando,

$$(1 - k^2)|z|^2 - z(\overline{z_1} - k^2\overline{z_2}) - \overline{z}(z_1 - k^2z_2) + (|z_1|^2 - k^2|z_2|^2) = 0.$$

Dividindo por $(1 - k^2) \neq 0$, obtemos uma equação da forma $|z|^2 - z\overline{c} - \overline{z}c + d = 0$, equivalente a $|z - c|^2 = |c|^2 - d$. Portanto, o lugar geométrico é uma circunferência de centro

$$c = \frac{z_1 - k^2z_2}{1 - k^2}.$$

■



Exemplo — Mediatriz no plano complexo

Determine o lugar geométrico de $|z - 1| = |z + 3i|$.

Resolução. Seja $z = x + yi$. Então

$$|z - 1|^2 = |z + 3i|^2 \implies (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 3)^2.$$

Expandindo,

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9,$$

logo

$$x + 3y = -4.$$

É a reta mediatriz do segmento de extremidades 1 e $-3i$.

1.6.4 Regiões no Plano Complexo

Propriedade 1.10. *Faixas, anéis e regiões compostas*

Além de curvas, as condições com módulo, parte real e parte imaginária descrevem regiões:

1. $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b \quad \longrightarrow \quad$ faixa vertical entre $x = a$ e $x = b$
2. $a \leq \operatorname{Im}(z) \leq b \quad \longrightarrow \quad$ faixa horizontal entre $y = a$ e $y = b$
3. $r_1 < |z - z_0| < r_2 \quad \longrightarrow \quad$ anel aberto de centro z_0
4. $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2 \quad \longrightarrow \quad$ anel fechado de centro z_0

Interseções dessas condições produzem regiões compostas.

Exemplo — Região do plano complexo

Descreva o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| \leq 3 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$.

Resolução. A condição

$$1 < |z - i| \leq 3$$

descreve o anel de centro i , raio interno 1 e raio externo 3, com a circunferência interna excluída e a externa incluída. A condição

$$0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$$

descreve a faixa vertical entre as retas $x = 0$ e $x = 2$. Logo o conjunto procurado é a parte desse anel contida nessa faixa.

1.6.5 Elipses, Hipérboles e Parábolas

Propriedade 1.11. *Elipse*

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos e $2a > |z_1 - z_2|$. O lugar geométrico

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

é uma elipse de focos z_1 e z_2 . Seu centro é o ponto médio

$$m = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

No caso simétrico $z_1 = -c$, $z_2 = c$, com $c > 0$, a elipse tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Caso simétrico. Seja $z = x + yi$ e escreva

$$r_1 = |z - c| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad r_2 = |z + c| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

A hipótese é $r_1 + r_2 = 2a$, com $a > c$. Então $r_1 = 2a - r_2$, e

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4ar_2 + (x + c)^2 + y^2.$$

Daí

$$ar_2 = a^2 + cx.$$

Elevando novamente ao quadrado,

$$a^2((x + c)^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2.$$

Após a simplificação,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Definindo $b^2 = a^2 - c^2$, obtemos

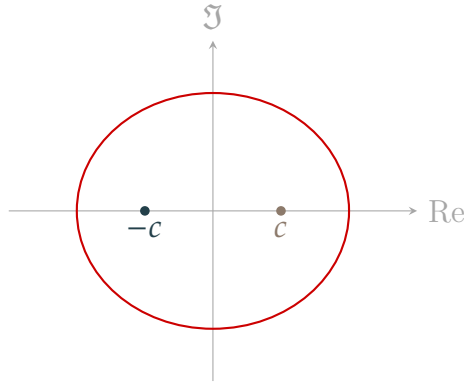
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

■

$$|z - c| + |z + c| = 2a$$


Exemplo — Elipse no plano complexo

Descreva o lugar geométrico $|z - 1| + |z + 1| = 4$.

Resolução. Os focos são 1 e -1 , simétricos em relação à origem. Temos

$$2a = 4 \implies a = 2 \quad \text{e} \quad 2c = 2 \implies c = 1.$$

Logo

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3.$$

Portanto o lugar geométrico é a elipse de centro na origem, focos em ± 1 e equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Propriedade 1.12. *Hipérbole*

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos e $0 < 2a < |z_1 - z_2|$. O lugar geométrico

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$$

é uma hipérbole de focos z_1 e z_2 . Seu centro é o ponto médio

$$m = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

No caso simétrico $z_1 = -c, z_2 = c$, com $c > a > 0$, a hipérbole tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Caso simétrico. Seja $z = x + yi$ e defina

$$r_1 = |z - c| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad r_2 = |z + c| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Para um dos ramos, temos $r_2 - r_1 = 2a$. Então $r_2 = 2a + r_1$, e

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4ar_1 + (x - c)^2 + y^2.$$

Logo

$$ar_1 = cx - a^2.$$

Elevando ao quadrado,

$$a^2((x - c)^2 + y^2) = (cx - a^2)^2.$$

Após a simplificação,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

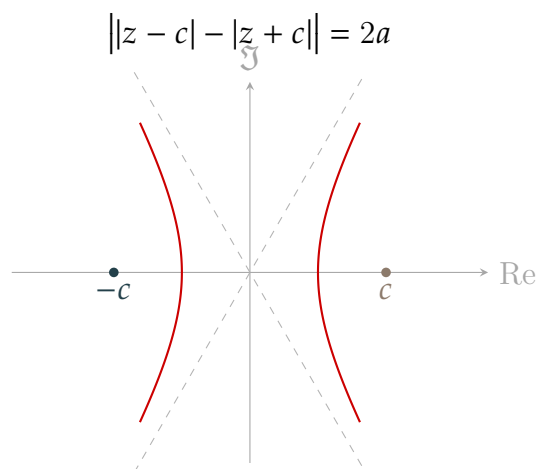
Definindo $b^2 = c^2 - a^2$, obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O valor absoluto na definição reúne os dois ramos da hipérbole. ■



Exemplo — Hipérbole no plano complexo

Descreva o lugar geométrico

$$||z - 2| - |z + 2|| = 2.$$

Resolução. Os focos são 2 e -2. Temos

$$2a = 2 \implies a = 1 \quad \text{e} \quad 2c = 4 \implies c = 2.$$

Logo

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3.$$

Portanto o lugar geométrico é a hipérbole de centro na origem, focos em ± 2 e equação

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Propriedade 1.13. *Parábola canônica*

Fixe $p > 0$. O lugar geométrico dos pontos $z = x + yi$ cuja distância ao foco p coincide com a distância à diretriz $x = -p$ é a parábola de vértice na origem e equação

$$y^2 = 4px.$$

Demonstração. A distância de (x, y) ao foco $(p, 0)$ é

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2},$$

enquanto a distância à reta $x = -p$ é $|x + p|$. Logo

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|.$$

Elevando ao quadrado,

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2,$$

e portanto

$$y^2 = 4px.$$

■

Além de reconhecer curvas por equações de distância, também é útil dispor de critérios puramente algébricos para decidir posições relativas entre pontos. O próximo resultado fornece exatamente esse tipo de teste no caso do alinhamento.

1.6.6 Critérios Algébricos de Posição

Uma razão real entre diferenças de afixos identifica alinhamento sem recorrer à forma trigonométrica.

Propriedade 1.14. *Alinhamento via quociente real*

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos. Para $z \neq z_2$,

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \in \mathbb{R} \iff z, z_1, z_2 \text{ são colineares.}$$

Demonstração. A condição

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \in \mathbb{R}$$

diz que os vetores $z - z_1$ e $z - z_2$ são proporcionais por um escalar real. Isso ocorre exatamente quando eles têm a mesma direção, isto é, quando os pontos z , z_1 e z_2 estão sobre a mesma reta. ■

Exemplo — Quociente real e alinhamento

Determine o lugar geométrico dos pontos $z \neq i$ tais que

$$\frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R}.$$

Resolução. A condição diz que os pontos z , 1 e i são colineares. A reta que passa por $(1, 0)$ e $(0, 1)$ tem equação

$$x + y = 1.$$

Como o quociente não está definido em $z = i$, o lugar geométrico é essa reta, com a exclusão do ponto i .

1.6.7 Transformações Elementares

Propriedade 1.15. Transformações elementares

Algumas transformações geométricas aparecem naturalmente já na forma algébrica:

1. $z \mapsto z + b \longrightarrow$ translação por b
2. $z \mapsto \lambda z$, com $\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow$ dilatação ao longo das retas pela origem; para $\lambda > 0$, trata-se de uma homotetia de razão λ
3. $z \mapsto iz \longrightarrow$ rotação de um quarto de volta em torno da origem
4. $z \mapsto \bar{z} \longrightarrow$ reflexão no eixo real

Exemplo — Imagem de uma reta por translação

Descreva a imagem da reta

$$\operatorname{Re}(z) = 1$$

pela transformação

$$w = z + (2 - i).$$

Resolução. Seja $z = x + yi$. A reta dada é

$$x = 1.$$

Da relação

$$w = z + (2 - i)$$

segue que

$$z = w - (2 - i).$$

Logo a condição sobre z se torna

$$\operatorname{Re}(w - (2 - i)) = 1.$$

Como $\operatorname{Re}(2 - i) = 2$, obtemos

$$\operatorname{Re}(w) - 2 = 1,$$

isto é,

$$\operatorname{Re}(w) = 3.$$

Portanto, a imagem da reta $\operatorname{Re}(z) = 1$ é a reta

$$\operatorname{Re}(w) = 3.$$

Geometricamente, a translação por $2 - i$ desloca a reta duas unidades para a direita e uma unidade para baixo.

Exemplo — Meia elipse por restrição linear

Descreva geometricamente o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 1| = 4 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}.$$

Resolução. A condição

$$|z - 1| + |z + 1| = 4$$

descreve a elipse de focos ± 1 e equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

A desigualdade $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ equivale a $x \geq 0$, isto é, seleciona o semiplano à direita do eixo imaginário. Portanto, o conjunto procurado é a metade direita dessa elipse, incluindo os pontos de interseção com o eixo imaginário.

Exemplo — Alinhamento e circunferência

Determine o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |z| = \sqrt{2}.$$

Resolução. Pela subseção anterior, a condição

$$\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$$

descreve a reta que passa por 1 e i , isto é,

$$x + y = 1,$$

com a exclusão de $z = i$. A segunda condição descreve a circunferência

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Para encontrar a interseção, substituímos $y = 1 - x$ na equação da circunferência:

$$x^2 + (1 - x)^2 = 2.$$

Daí

$$2x^2 - 2x - 1 = 0,$$

e portanto

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Segue que

$$y = 1 - x = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}.$$

Logo o conjunto procurado é formado por dois pontos:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i \quad \text{e} \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

Exemplo — Imagem de um segmento por translação

Considere o segmento

$$z = t(1 + i), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Descreva a imagem desse segmento pela transformação

$$w = z + (2 - i).$$

Resolução. Para $0 \leq t \leq 1$, temos

$$w = (2 - i) + t(1 + i).$$

Trata-se novamente de uma parametrização afim. Quando $t = 0$, obtemos

$$w = 2 - i,$$

e quando $t = 1$, obtemos

$$w = 3.$$

Portanto, a imagem é o segmento de extremidades $2 - i$ e 3 .

i Dica — Padrões de reconhecimento

Os padrões abaixo aparecem repetidamente:

- $|z - z_0| = r \longrightarrow$ circunferência
- $|z - z_1| = |z - z_2| \longrightarrow$ mediatriz
- $|z - z_1| = k|z - z_2| \longrightarrow$ círculo de Apolônio
- $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \longrightarrow$ elipse
- $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a \longrightarrow$ hipérbole
- $z = z_1 + t(z_2 - z_1) \longrightarrow$ reta, segmento ou semirreta, conforme a restrição sobre t

_____ ◇ _____

1.7 Desigualdade Triangular: Técnicas e Aplicações

1.7.1 Desigualdade Triangular

Teorema 1.1. — Desigualdade Triangular

Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- (i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, com igualdade $\Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0: z_1 = \lambda z_2$ (ou $z_2 = 0$)
- (ii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, com igualdade $\Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0: z_1 = \lambda z_2$ (ou $z_2 = 0$)

Em palavras: igualdade ocorre quando um dos números é zero ou, sendo ambos não nulos, um deles é múltiplo real positivo do outro.

A desigualdade $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ diz exatamente que um lado de um triângulo não excede a soma dos outros dois; a igualdade ocorre quando o triângulo degenera num segmento.

A demonstração da desigualdade básica e de sua forma reversa já apareceu na subseção 1.3.4 (Propriedades 8–9). Registramos aqui apenas a condição de igualdade, necessária nas aplicações de máximo e mínimo.

A igualdade $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ocorre exatamente quando $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$, isto é, quando $z_1 \bar{z}_2$ é real e não-negativo. Para $z_2 \neq 0$:

$$z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \iff \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \iff z_1 = \lambda z_2, \quad \lambda \geq 0.$$

No caso $z_2 = 0$, a igualdade já é automática. Em palavras: quando ambos são não nulos, z_1 e z_2 têm o **mesmo argumento**.

Em problemas de máximo e mínimo, reescreve-se a expressão, aplica-se a desigualdade triangular, identifica-se a condição de igualdade e verifica-se explicitamente que o ponto candidato atinge o limitante. Sem essa verificação, obtém-se apenas uma cota.

⚠ Atenção — Cota sem verificação

A desigualdade triangular fornece apenas uma cota. Para que ela seja um extremo de fato, é necessário exibir um ponto que atinja a igualdade.

A desigualdade triangular implica, em particular, o Teorema de Ptolomeu.

Exemplo — A Desigualdade de Ptolomeu no Plano Complexo

Prove que, para quaisquer quatro números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 , a seguinte desigualdade é verdadeira:

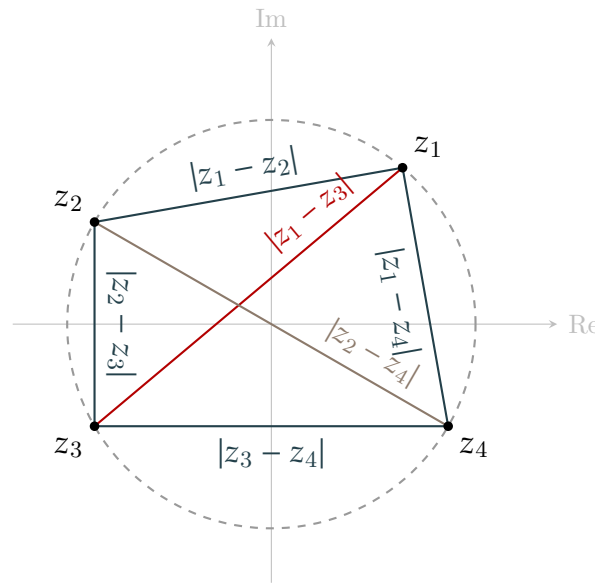
$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| \leq |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_2 - z_3||z_1 - z_4|$$

Resolução. Partimos da identidade algébrica, válida para quaisquer $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ (verificação direta por distribuição):

$$(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_2 - z_3)(z_1 - z_4)$$

Aplicando módulo em ambos os lados, usando $|ab| = |a||b|$ e a desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$:

$$\begin{aligned} |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_2 - z_3)(z_1 - z_4)| \\ |z_1 - z_3||z_2 - z_4| &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_2 - z_3)(z_1 - z_4)| \\ |z_1 - z_3||z_2 - z_4| &\leq |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)| \\ |z_1 - z_3||z_2 - z_4| &\leq |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_2 - z_3||z_1 - z_4| \end{aligned}$$



Interpretação geométrica: Se z_1, z_2, z_3, z_4 são vértices de um quadrilátero no plano de Argand-Gauss, a soma dos produtos dos lados opostos majora o produto das diagonais. No caso não degenerado, a igualdade ocorre quando o quadrilátero é **cíclico** e os vértices estão em ordem; casos colineares em ordem também podem produzir igualdade.

Em problemas de olimpíada e concursos, a desigualdade triangular aparece sobretudo para estimar módulos em circunferências e discos e para provar cotas para expressões polinomiais. O ponto decisivo é saber combinar a forma direta com a forma reversa.

1.7.2 Estimativas de Módulo

Exemplo — Limitantes para $|z^2 + 1|$

Seja $|z| = 2$. Determine os valores máximo e mínimo de $|z^2 + 1|$.

Resolução.

Limitante superior (desigualdade triangular direta):

$$|z^2 + 1| \leq |z^2| + |1| = |z|^2 + 1 = 5.$$

Igualdade quando z^2 e 1 têm o mesmo argumento, isto é, $z^2 > 0$. Com $|z| = 2$: $z = \pm 2$, e de fato $|4 + 1| = 5$.

Limitante inferior (desigualdade triangular reversa):

$$|z^2 + 1| \geq ||z^2| - |1|| = |4 - 1| = 3.$$

Igualdade quando z^2 e 1 têm argumentos opostos, isto é, $z^2 < 0$. Com $|z| = 2$: $z = \pm 2i$, e $|-4 + 1| = 3$.

Portanto $3 \leq |z^2 + 1| \leq 5$.

Exemplo — Máximo e mínimo de $|z + 2|$ com $|z - i| = 1$

Determine os extremos de $|z + 2|$ quando z percorre a circunferência $|z - i| = 1$.

Resolução. Temos $z + 2 = (z - i) + (i + 2)$, com $|z - i| = 1$ conhecido. Aplicando a desigualdade triangular e sua forma reversa,

$$|z + 2| \leq |z - i| + |i + 2| = 1 + \sqrt{5}, \quad |z + 2| \geq ||i + 2| - |z - i|| = \sqrt{5} - 1.$$

Máximo. Igualdade em $|A + B| \leq |A| + |B|$ requer $A = \lambda B$, $\lambda \geq 0$, ou seja, $z - i = \lambda(2 + i)$, $\lambda \geq 0$. Como $|z - i| = 1$ e $|2 + i| = \sqrt{5}$, obtemos $\lambda = 1/\sqrt{5}$ e:

$$z_{\max} = i + \frac{2 + i}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} + i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

De fato, $|z_{\max} - i| = \left|\frac{2 + i}{\sqrt{5}}\right| = 1$ e

$$|z_{\max} + 2| = \left|\left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right| = \left|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2 + i)\right| = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5} = \sqrt{5} + 1.$$

Mínimo. A igualdade em $|A + B| \geq ||A| - |B||$ exige colinearidade em sentidos opostos:

$z - i = -\lambda(2 + i)$, $\lambda \geq 0$. De novo $\lambda = 1/\sqrt{5}$:

$$z_{\min} = i - \frac{2+i}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} + i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Também aqui $|z_{\min} - i| = 1$ e $|z_{\min} + 2| = \left|\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2 + i)\right| = \sqrt{5} - 1$.

Portanto $\min |z + 2| = \sqrt{5} - 1$ e $\max |z + 2| = 1 + \sqrt{5}$.

Exemplo — Generalização com n parcelas

Sejam $n \geq 1$ e $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Prove que $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

Resolução. Indução sobre n . O caso $n = 1$ é imediato, e o caso $n = 2$ é a desigualdade triangular. Para o passo indutivo:

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq (|z_1| + \dots + |z_n|) + |z_{n+1}|.$$

Exemplo — Cota inferior via série geométrica

Se $\theta_i \in [0, \pi/6]$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e

$$\operatorname{sen} \theta_1 z^4 + \operatorname{sen} \theta_2 z^3 + \operatorname{sen} \theta_3 z^2 + \operatorname{sen} \theta_4 z + \operatorname{sen} \theta_5 = 2,$$

mostre que $|z| > \frac{3}{4}$.

Resolução. Tomando o módulo de ambos os lados e aplicando a desigualdade triangular:

$$2 = |\text{lado esquerdo}| \leq |\operatorname{sen} \theta_1||z|^4 + |\operatorname{sen} \theta_2||z|^3 + |\operatorname{sen} \theta_3||z|^2 + |\operatorname{sen} \theta_4||z| + |\operatorname{sen} \theta_5|.$$

Como $\theta_i \in [0, \pi/6]$, temos $\operatorname{sen} \theta_i \in [0, \frac{1}{2}]$, logo:

$$2 \leq \frac{1}{2}(|z|^4 + |z|^3 + |z|^2 + |z| + 1).$$

Portanto

$$|z| + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 \geq 3.$$

Se $|z| \leq \frac{3}{4}$, então

$$|z| + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 \leq \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256} = \frac{525}{256} < 3,$$

contradição. Logo $|z| > \frac{3}{4}$.

Exemplo — Maior e menor $|z|$ com restrição de disco

Se $|z - 2 + i| \leq 2$, determine os valores máximo e mínimo de $|z|$.

Resolução.

$|z - (2 - i)| \leq 2$ descreve o disco de centro $c = 2 - i$ e raio $r = 2$. Temos $|c| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Pela desigualdade triangular reversa,

$$||z| - |c|| \leq |z - c| \leq 2,$$

logo $-2 \leq |z| - \sqrt{5} \leq 2$, ou seja,

$$\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq \sqrt{5} + 2.$$

A igualdade $|z - c| = |z| - |c|$ exige que $z = \lambda c$ para algum $\lambda \geq 1$, com origem, c e z colineares e z além de c . No bordo do disco, isso leva a

$$z_{\max} = c + 2 \cdot \frac{c}{|c|} = (2 - i) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

A igualdade $|z - c| = |c| - |z|$ exige $z = \lambda c$, $0 \leq \lambda \leq 1$. No outro extremo do mesmo segmento,

$$z_{\min} = c - 2 \cdot \frac{c}{|c|} = (2 - i) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

• *Máximo:* $|z_{\max}| = |2 - i| \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{5} + 2$ e $|z_{\max} - (2 - i)| = \left| \frac{2(2 - i)}{\sqrt{5}} \right| = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$.

• *Mínimo:* $|z_{\min}| = \sqrt{5} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{5} - 2$ e $|z_{\min} - (2 - i)| = \left| \frac{-2(2 - i)}{\sqrt{5}} \right| = 2$.

$|z|_{\min} = \sqrt{5} - 2 \approx 0,24$ e $|z|_{\max} = \sqrt{5} + 2 \approx 4,24$. Geometricamente, o máximo e o mínimo de $|z|$ em um disco de centro c e raio r são atingidos na reta que passa pela origem e por c ; em geral,

$$|z|_{\max} = |c| + r, \quad |z|_{\min} = \max(|c| - r, 0).$$

Exemplo — Cota superior para $|z + 1|$ dado $|z + 4| \leq 3$

Se $|z + 4| \leq 3$, determine o maior valor possível de $|z + 1|$.

Resolução. Reescrevemos $z + 1 = (z + 4) - 3$ e aplicamos a desigualdade triangular:

$$|z + 1| = |(z + 4) + (-3)| \leq |z + 4| + |-3| = |z + 4| + 3 \leq 3 + 3 = 6.$$

Para verificar que o máximo é atingido, basta tomar $z = -7$: $|z + 4| = 3$ e $|z + 1| = 6$.

O maior valor de $|z + 1|$ é 6.

Exemplo — Determinando $|z_1 + z_2 + z_3|$ via técnica do conjugado

Sejam $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$, $|z_3| = 3$ e $|9z_1z_2 + 4z_3z_1 + z_2z_3| = 6$. Determine $|z_1 + z_2 + z_3|$.

Resolução. A relação central é $z\bar{z} = |z|^2$. Como $|z_1|^2 = 1$, $|z_2|^2 = 4$ e $|z_3|^2 = 9$:

$$\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1, \quad \frac{4}{z_2} = \bar{z}_2, \quad \frac{9}{z_3} = \bar{z}_3.$$

Fatorando $z_1z_2z_3$ da expressão:

$$\begin{aligned} 9z_1z_2 + 4z_3z_1 + z_2z_3 &= z_1z_2z_3 \left(\frac{9}{z_3} + \frac{4}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right) \\ &= z_1z_2z_3 (\bar{z}_3 + \bar{z}_2 + \bar{z}_1) \\ &= z_1z_2z_3 \cdot \overline{z_1 + z_2 + z_3}. \end{aligned}$$

Tomando módulos,

$$6 = |z_1z_2z_3| \cdot |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = 6 |z_1 + z_2 + z_3|.$$

Logo $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$.

Exemplo — Expressão unimodular e $|z_1|$

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com z_2 não unimodular, isto é, $|z_2| \neq 1$, e

$$\left| \frac{z_1 - 2z_2}{2 - z_1\bar{z}_2} \right| = 1.$$

Determine $|z_1|$.

Resolução. Da hipótese $|z_1 - 2z_2| = |2 - z_1\bar{z}_2|$. Elevando ao quadrado e usando $|w|^2 = w\bar{w}$,

$$\begin{aligned} |z_1 - 2z_2|^2 &= (z_1 - 2z_2)(\bar{z}_1 - 2\bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 - 2z_1\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1z_2 + 4|z_2|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2 - z_1\bar{z}_2|^2 &= (2 - z_1\bar{z}_2)(2 - \bar{z}_1z_2) \\ &= 4 - 2z_1\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1z_2 + |z_1|^2|z_2|^2. \end{aligned}$$

Igualando e cancelando os termos cruzados $-2z_1\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1z_2$:

$$|z_1|^2 + 4|z_2|^2 = 4 + |z_1|^2|z_2|^2.$$

Reorganizando:

$$|z_1|^2(1 - |z_2|^2) - 4(1 - |z_2|^2) = 0 \implies (|z_1|^2 - 4)(1 - |z_2|^2) = 0.$$

Como $|z_2| \neq 1$ (hipótese), temos $1 - |z_2|^2 \neq 0$, logo $|z_1|^2 = 4$ e:

$$|z_1| = 2.$$

Exemplo — Números de módulo unitário que satisfazem uma identidade com somas de módulos

Determine todos os números complexos z de módulo 1 tais que

$$\sum_{k=1}^{1005} |z^{2k+1} - z^{2k}| = \sum_{k=1}^{1006} |z^{2k} - z^{2k-2}|.$$

Resolução. Como $|z| = 1$, temos $|z^m| = 1$ para todo inteiro m . Portanto,

$$|z^{2k+1} - z^{2k}| = |z^{2k}| |z - 1| = |z - 1|$$

e

$$|z^{2k} - z^{2k-2}| = |z^{2k-2}| |z^2 - 1| = |z^2 - 1|.$$

Logo, a equação dada se reduz a

$$1005 |z - 1| = 1006 |z^2 - 1|.$$

Como $|z^2 - 1| = |z - 1| |z + 1|$, obtemos

$$1005 |z - 1| = 1006 |z - 1| |z + 1|.$$

Daí, ou $z = 1$, ou então $|z + 1| = \frac{1005}{1006}$.

Resta analisar a segunda possibilidade. Como $|z| = 1$, temos $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Assim,

$$|z + 1|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1) = 2 + z + \bar{z} = 2 + 2 \operatorname{Re}(z).$$

Portanto,

$$2 + 2 \operatorname{Re}(z) = \left(\frac{1005}{1006} \right)^2,$$

isto é,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1005^2}{1006^2} - 2 \right) = -\frac{1014047}{2024072}.$$

Como $|z| = 1$, as soluções são

$$z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1014047}{2024072} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{1014047}{2024072}\right)^2}.$$

Exemplo — Uma igualdade de módulos obtida por interpretação geométrica

Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\left| \frac{z+i}{1+z} \right| = 1.$$

Prove que

$$\left| z^{2010} + iz^{2009} + \dots + i^{2009}z + i^{2010} \right| = \left| z^{2010} + z^{2009} + \dots + z + 1 \right|.$$

Resolução. A condição dada equivale a $|z+i| = |z+1|$. Logo, z equidista dos pontos $-i$ e -1 , portanto pertence à mediatriz do segmento que une -1 a $-i$:

$$z = x(1+i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que as fórmulas abaixo são aplicadas com $z \neq i$ e $z \neq 1$: esses dois pontos não satisfazem a condição inicial.

$$z^{2010} + iz^{2009} + \dots + i^{2009}z + i^{2010} = \frac{z^{2011} - i^{2011}}{z - i}$$

e

$$z^{2010} + z^{2009} + \dots + z + 1 = \frac{z^{2011} - 1}{z - 1}.$$

Como $z = x(1+i)$, temos $|z-i| = |z-1|$, de modo que basta mostrar que

$$|z^{2011} - i^{2011}| = |z^{2011} - 1|.$$

Como $i^{2011} = -i$, isso equivale a $|z^{2011} + i| = |z^{2011} - 1|$.

Com $z = x(1+i)$, obtemos $z^{2011} = x^{2011}(1+i)^{2011}$. Como $2011 = 4 \cdot 502 + 3$,

$$(1+i)^{2011} = (1+i)^3((1+i)^4)^{502} = 2(i-1) \cdot (-4)^{502} = 2^{1005}(i-1).$$

Portanto, $z^{2011} = 2^{1005}x^{2011}(i-1)$, que pertence à reta $\{y(i-1) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Todo ponto dessa reta equidista de 1 e de $-i$, logo $|z^{2011} - 1| = |z^{2011} + i|$.

Exemplo — Raízes da unidade com partes real e imaginária racionais

Determine todos os números complexos $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, tais que $z^n = 1$ para algum inteiro positivo n .

Resolução. Como $z^n = 1$, temos $z \neq 0$ e $|z|^n = 1$, logo $|z| = 1$. Assim,

$$\bar{z} = \frac{1}{z} = z^{n-1}.$$

Defina

$$u = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2a.$$

Como $a \in \mathbb{Q}$, temos $u \in \mathbb{Q}$.

Para cada $m \geq 0$, ponha

$$A_m = z^m + z^{-m}.$$

Então $A_0 = 2$, $A_1 = u$ e

$$A_{m+1} = uA_m - A_{m-1}.$$

Por indução, A_m é um polinômio mônico de grau m em u , com coeficientes inteiros, para $m \geq 1$. Como $z^n = 1$, segue que

$$A_n = z^n + z^{-n} = 2.$$

Portanto u é raiz racional de um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Pelo teorema da raiz racional, u é inteiro.

Além disso, $|z| = 1$ implica $|u| = |z + \bar{z}| = |2a| \leq 2$. Logo

$$u \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Como $u = 2a$, temos

$$a \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Da relação $a^2 + b^2 = 1$, com $b \in \mathbb{Q}$, os casos $a = \pm \frac{1}{2}$ exigiriam $b^2 = \frac{3}{4}$, impossível para $b \in \mathbb{Q}$. Restam:

$$a = \pm 1, b = 0 \quad \text{ou} \quad a = 0, b = \pm 1.$$

Portanto,

$$z \in \{1, -1, i, -i\}.$$